OPERE MATEMATICHE

DI

FRANCESCO BRIOSCHI.

OPERE MATEMATICHE

DI

FRANCESCO BRIOSCHI

PUBBLICATE

PER CURA DEL *COMITATO PER LE ONORANZE A FRANCESCO BRIOSCHI*

(G. ASCOLI, V. CERRUTI, G. COLOMBO, L. CREMONA, G. NEGRI, G. SCHIAPARELLI).

TOMO QUARTO.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA
MILANO
1906

CXLV.

SULLA ESPRESSIONE PER SERIE DELLE FUNZIONI IPERELLITTICHE A DUE VARIABILI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume II (1885-86, 1° sem.), pp. 199-203, 215-221.

NOTA I.

1. È nota la formola Jacobiana

$$\mathrm{dn}^2 u = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log \Theta(u)}{d u^2},$$

ed è noto come essa sia stata posta a fondamento nelle classiche ricerche del signor Weierstrass intorno alla teoria delle funzioni ellittiche *).

Analoghe espressioni sussistono per le funzioni iperellittiche a due variabili, come dimostriamo in questo scritto. Posto

$$f(x) = x^5 + A_1 x^4 + \cdots + A_4 x + A_5 = \prod_{r=0}^{4} (x - a_r),$$

$$t = \sqrt{f(x)}, \quad f_1(x) = \alpha x + \beta, \quad f_2(x) = \gamma x + \delta,$$

sono integrali *normali* di prima specie i seguenti:

$$\frac{1}{2}\int \frac{f_1(x)}{t} d x, \quad \frac{1}{2}\int \frac{f_2(x)}{t} d x;$$

*) *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn* Weierstrass, *bearbeitet und herausgegeben von* H. A. Schwarz, Göttingen, 1885.

INDICE DEL TOMO IV.

Ciò posto, rammentando essere

$$f(x) = x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + \cdots + A_5,$$

trovasi che il coefficiente di u_1^2 in L_r ha il valore seguente:

$$6\sigma_0 a_r^3 + (\sigma_1^2 + 4A_1\sigma_0 + 3A_4)a_r^2 + (2\sigma_0\sigma_1 + 2A_2\sigma_0 + 2A_1A_4 + 6A_5)a_r$$

$$+ \sigma_0^2 + 2A_4\sigma_1 + A_2A_4 + 4A_1A_5 + 2(2\sigma_1 + A_2)\frac{A_5}{a_r} - 2f'(a_r)\frac{\partial\sigma_0}{\partial a_r},$$

il coefficiente di $2u_1u_2$ il valore:

$$4\sigma_1 a_r^3 + (\sigma_0 + \sigma_1\sigma_2 + 2A_1\sigma_1)a_r^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_0\sigma_2 + A_2\sigma_1 + A_4)a_r$$

$$+ \sigma_0\sigma_1 + A_4\sigma_2 + 2A_5 + 2\sigma_2\frac{A_5}{a_r} - 2f'(a_r)\frac{\partial\sigma_1}{\partial a_r},$$

infine quello di u_2^2:

$$2\sigma_2 a_r^3 + (\sigma_2^2 + 2\sigma_1 + A_2)a_r^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + A_3)a_r + \sigma_1^2 + 3A_4 + 4\frac{A_5}{a_r} - 2f'(a_r)\frac{\partial\sigma_2}{\partial a_r}.$$

Per questi valori si hanno tosto le due equazioni:

$$\sum_0^4{}_r \frac{L_r}{f'(a_r)} = -2\left[\left(\sum{}_r\frac{\partial\sigma_0}{\partial a_r} + 2\sigma_1 + A_2\right)u_1^2 + 2\left(\sum{}_r\frac{\partial\sigma_1}{\partial a_r} + \sigma_2\right)u_1u_2 + \left(\sum{}_r\frac{\partial\sigma_2}{\partial a_r} + 2\right)u_2^2\right],$$

$$\sum_0^4{}_r \frac{a_r L_r}{f'(a_r)} = -2\left[\left(\sum{}_r a_r\frac{\partial\sigma_0}{\partial a_r} - 3\sigma_0\right)u_1^2 + 2\left(\sum{}_r a_r\frac{\partial\sigma_1}{\partial a_r} - 2\sigma_1\right)u_1u_2 + \left(\sum{}_r a_r\frac{\partial\sigma_2}{\partial a_r} - \sigma_2\right)u_2^2\right];$$

ma nel caso attuale le quantità σ_0, σ_1, σ_2 hanno i seguenti valori [vedi le ultime relazioni della Nota I ed una osservazione del sig. WILTHEISS *)]:

$$\sigma_0 = a_1a_3p_1 + p_3, \qquad \sigma_1 = a_1a_3, \qquad \sigma_2 = -(a_1 + a_3),$$

e perciò l'una e l'altra delle espressioni superiori saranno nulle.

Le funzioni M_r, N_r, lineari rispetto ad u_1, u_2, hanno i valori che seguono:

$$M_r = [3a_r^3 + 2A_1a_r^2 + (\sigma_1 + A_2)a_r + \sigma_0]u_1 + (a_r^2 + \sigma_2 a_r + \sigma_1)u_2,$$

$$N_r = \left[\sigma_1 a_r^2 + \sigma_0 a_r + A_4 + 2\frac{A_5}{a_r}\right]u_1 + (a_r^3 + \sigma_2 a_r^2 + \sigma_1 a_r)u_2;$$

---

*) Mem. cit. [pag. 253].

quindi si ottengono le

$$\sum_0^4 {}_r \frac{M_r}{f'(a_r)} = 0, \quad \sum_0^4 {}_r \frac{a_r M_r}{f'(a_r)} = 3 u_1; \quad \sum_0^4 {}_r \frac{N_r}{f'(a_r)} = -2 u_1, \quad \sum_0^4 {}_r \frac{a_r N_r}{f'(a_r)} = u_2;$$

cioè la equazione trasformata (1) conduce dapprima alle due:

$$(2) \qquad u_1 \frac{\partial S}{\partial u_2} + \sum_0^4 {}_r \frac{\partial S}{\partial a_r} = 0, \qquad 3 u_1 \frac{\partial S}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial S}{\partial u_2} - 2 \sum_0^4 {}_r a_r \frac{\partial S}{\partial a_r} = 0.$$

3. Rimangono ora a determinarsi le tre equazioni che contengono le derivate seconde parziali di S rispetto ad u_1, u_2. Notiamo dapprima che

$$\sum_0^4 {}_r \frac{a_r^2 L_r}{f'(a_r)} = l_0 u_1^2 + 2 l_1 u_1 u_2 + l_2 u_2^2,$$

nella quale l_0, l_1, l_2 hanno i seguenti valori:

$$(3) \qquad \begin{cases} l_0 = a_1^2 a_3^2 - a_1 a_3 p_2 - (a_1 + a_3) p_3, \\ l_1 = - a_1 a_3 (a_1 + a_3) - a_1 a_3 p_1 + p_3, \\ l_2 = a_1^2 + a_3^2 + a_1 a_3 + (a_1 + a_3) p_1 + p_2, \end{cases}$$

e quindi:

$$l_0 = \sigma_2 l_1 - \sigma_1 l_2.$$

Si hanno inoltre le

$$\sum_0^4 {}_r \frac{a_r^2 M_r}{f'(a_r)} = - A_1 u_1 + u_2, \qquad \sum_0^4 {}_r \frac{a_r^2 N_r}{f'(a_r)} = \sigma_1 u_1 + (\sigma_2 - A_1) u_2,$$

ed in conseguenza la terza equazione differenziale sarà la seguente:

$$(4) \qquad \begin{cases} 4 \sum_r a_r^2 \frac{\partial S}{\partial a_r} = (l_0 u_1^2 + 2 l_1 u_1 u_2 + l_2 u_2^2) S \\ \qquad - 2 (A_1 u_1 - u_2) \frac{\partial S}{\partial u_1} + 2 [\sigma_1 u_1 + (\sigma_2 - A_1) u_2] \frac{\partial S}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 S}{\partial u_2^2}. \end{cases}$$

Per ottenere la quarta equazione differenziale, nella quale, come in quest'ultima, entri una sola derivata seconda, la $\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial u_2}$, moltiplichiamo i termini della (1) per $\frac{a_r^3 + A_1 a_r^2}{f'(a_r)}$ e sommiamo. Si ha:

$$\sum_0^4 {}_r (a_r^3 + A_1 a_r^2) \frac{L_r}{f'(a_r)} = 2 (m_0 u_1^2 + 2 m_1 u_1 u_2 + m_2 u_2^2),$$

essendo

$$(5) \qquad m_0 = a_1^2 a_3^2 p_1 + a_1 a_3 (a_1 + a_3) p_3 + (a_1^2 + a_3^2 + a_1 a_3) p_3,$$

ossia

$$m_0 = (\sigma_2^2 - \sigma_1) l_1 - \sigma_1 \sigma_2 l_2,$$

ed $m_1 = l_0$, $m_2 = l_1$.

Si hanno inoltre:

$$\sum_0^4{}_r (a_r^3 + A_1 a_r^2) \frac{M_r}{f'(a_r)} = (\sigma_1 - 2A_2) u_1 + \sigma_2 u_2,$$

$$\sum_0^4{}_r (a_r^3 + A_1 a_r^2) \frac{N_r}{f'(a_r)} = \sigma_0 u_1 + (\sigma_1 - A_2) u_2;$$

e la quarta equazione differenziale sarà:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4\sum_0^4{}_r (a_r^3 + A_1 a_r^2) \frac{\partial S}{\partial a_r} = 2(m_0 u_1^2 + 2 m_1 u_1 u_2 + m_2 u_2^2) S \\ & + 2[(\sigma_1 - 2A_2) u_1 + \sigma_2 u_2] \frac{\partial S}{\partial u_1} + 2[\sigma_0 u_1 + (\sigma_1 - A_2) u_2] \frac{\partial S}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial u_2}. \end{aligned} \right.$$

L'ultima infine ottiensi moltiplicando per $\dfrac{a_r^4 + A_1 a_r^3 + A_2 a_r^2}{f'(a_r)}$ e sommando; essa è:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4\sum_0^4{}_r (a_r^4 + A_1 a_r^3 + A_2 a_r^2) \frac{\partial S}{\partial a_r} = (n_0 u_1^2 + 2 n_1 u_1 u_2 + n_2 u_2^2) S \\ & + 2[(\sigma_0 - 3A_3) u_1 + \sigma_1 u_2] \frac{\partial S}{\partial u_1} + 2(A_4 u_1 - A_3 u_2) \frac{\partial S}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2}, \end{aligned} \right.$$

ed in questa:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & n_0 = l_1^2 - \sigma_2 l_1 l_2 + \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_0 - \sigma_1 l_0, \\ & n_1 = m_0, \qquad n_2 = l_0. \end{aligned} \right.$$

Si sono così introdotte nelle tre ultime equazioni differenziali (4), (6), (7) le cinque funzioni n_0, m_0, l_0, l_1, l_2, delle quali le prime tre si possono esprimere in funzione di l_1, l_2 e di σ_1, σ_2. Le l_1, l_2 si possono poi esprimere in funzione di σ_0, σ_1, σ_2, A_1, A_2 o di σ_0, σ_1, σ_2, p_1, p_2, nel modo seguente:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & l_1 = \sigma_0 + 3\sigma_1\sigma_2 - 2A_1\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_1\sigma_2 - 2p_1\sigma_1, \\ & l_2 = 3\sigma_2^2 - 2\sigma_1 - 2A_1\sigma_2 + A_2 = \sigma_2^2 - \sigma_1 - p_1\sigma_2 + p_2. \end{aligned} \right.$$

Notiamo altresì che pei valori di l_0, m_0 potendo esprimersi i valori di σ_1 e di σ_2 in

funzione di queste due quantità e di l_1, l_2; avendosi cioè

$$\sigma_2 = \frac{l_2 m_0 - l_0 l_1}{l_0 l_2 - l_1^2}, \qquad \sigma_1 = \frac{l_1 m_0 - l_0^2}{l_0 l_2 - l_1^2};$$

sostituendo questi valori nella (8) si avrà n_0 espresso in funzione di m_0, l_0, l_1, l_2 per mezzo della relazione:

$$\begin{vmatrix} n_0 & m_0 & l_0 \\ m_0 & l_0 & l_1 \\ l_0 & l_1 & l_2 \end{vmatrix} + (l_0 l_2 - l_1^2)^2 = 0.$$

4. Le equazioni differenziali stabilite nel n° precedente mostrano facilmente la opportunità della scelta delle cinque quantità A_1, σ_2, σ_1, l_2, l_1 da sostituirsi alle $a_0, a_1, \ldots a_4$.

I coefficienti A_2, A_3, A_4, A_5 si esprimono per quelle cinque quantità come segue:

$$\begin{aligned}
A_2 &= 2\sigma_1 - 3\sigma_2^2 + 2A_1\sigma_2 + l_2, \\
A_3 &= -2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^3 + A_1(2\sigma_1 + \sigma_2^2) + l_1 + l_2\sigma_2, \\
A_4 &= \sigma_1^2 - 4\sigma_1\sigma_2^2 + 2A_1\sigma_1\sigma_2 + l_1\sigma_2 + l_2\sigma_1, \\
A_5 &= -2\sigma_1^2\sigma_2 + A_1\sigma_1^2 + l_1\sigma_1.
\end{aligned}$$

Le equazioni differenziali (2) conducono così alle due seguenti:

$$(10)\quad \begin{cases} u_1\dfrac{\partial S}{\partial u_2} = 5\dfrac{\partial S}{\partial A_1} + 2\dfrac{\partial S}{\partial \sigma_2} + \sigma_2\dfrac{\partial S}{\partial \sigma_1} + l_2\dfrac{\partial S}{\partial l_1}, \\[2ex] 3u_1\dfrac{\partial S}{\partial u_1} + u_2\dfrac{\partial S}{\partial u_2} = 2A_1\dfrac{\partial S}{\partial A_1} + 2\sigma_2\dfrac{\partial S}{\partial \sigma_2} + 4\sigma_1\dfrac{\partial S}{\partial \sigma_1} + 6l_1\dfrac{\partial S}{\partial l_1} + 4l_2\dfrac{\partial S}{\partial l_2}, \end{cases}$$

e siccome dalla seconda di queste, posto

$$S(u) = \sum C A_1^a \sigma_2^b \sigma_1^c l_1^d l_2^e u_1^r u_2^s,$$

nella quale C è un coefficiente numerico ed a, b, c, d, e, r, s sono numeri interi da 0 ad ∞, pei quali intendesi esteso il segno sommatorio, si ha:

$$3r + s = 2(a + b + 2c + 3d + 2e),$$

risulta che $r + s$ non può essere numero dispari, cioè che lo sviluppo in serie di $S(u)$,

avrà la forma:

$$S(u) = 1 + (u_1, u_2)_2 + (u_1, u_2)_4 + (u_1, u_2)_6 + \cdots,$$

essendo $(u_1, u_2)_2$, $(u_1, u_2)_4$, ... funzioni omogenee di u_1, u_2 dei gradi 2°, 4° e così via.

La trasformazione delle equazioni differenziali (4), (6), (7) conduce ai seguenti risultati. Si indichino con φ, ψ, $\mathfrak{z}$ i tre simboli di operazioni:

$$\varphi = \sum_0^4{}^r a_r^2 \frac{\partial}{\partial a_r}, \quad \psi = \sum_0^4{}^r (a_r^3 + A_1 a_r^2)\frac{\partial}{\partial a_r}, \quad \mathfrak{z} = \sum_0^4{}^r (a_r^4 + A_1 a_r^3 + A_2 a_r^2)\frac{\partial}{\partial a_r};$$

si ottengono facilmente le relazioni:

$$\varphi(A_1) = 2A_2 - A_1^2, \quad \varphi(\sigma_2) = 2\sigma_1 - \sigma_2^2, \quad \varphi(\sigma_1) = -\sigma_1\sigma_2,$$

$$\varphi(l_1) = \sigma_2 l_1 - 2\sigma_1 l_2 - A_1 l_1, \quad \varphi(l_2) = 3l_1 - \sigma_2 l_2 - A_1 l_2,$$

e per esse trasformasi la equazione (4).

Così, essendo

$$\psi(A_1) = -A_1 A_2 + 3A_3,$$

$$\psi(\sigma_2) = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + A_1(2\sigma_1 - \sigma_2^2),$$

$$\psi(\sigma_1) = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2 - A_1\sigma_1\sigma_2,$$

$$\psi(l_1) = -2l_1 l_2 + (5\sigma_2^2 - 5\sigma_1 - 3A_1\sigma_2)l_1 + (\sigma_2 - A_1)\sigma_1 l_1,$$

$$\psi(l_2) = -2l_2^2 + 2(A_1 - \sigma_2)l_1 + 2(3\sigma_2^2 - 2\sigma_1 - 2A_1\sigma_2)l_2,$$

si ha la trasformata della (6).

Infine si ha la trasformata della (7) dalle

$$\mathfrak{z}(A_1) = -A_1 A_3 + 4A_4,$$

$$\mathfrak{z}(\sigma_1) = \sigma_1\sigma_2(\sigma_1 + 2\sigma_2^2) + A_1\sigma_1(2\sigma_1 + \sigma_2^2) - \sigma_1\sigma_2 l_2,$$

$$\mathfrak{z}(\sigma_2) = 2(\sigma_1 - \sigma_2^2)^2 + A_1\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2^2) + (2\sigma_1 - \sigma_2^2)l_2,$$

$$\mathfrak{z}(l_1) = -3l_1^2 - 2\sigma_2 l_1 l_2 - 4\sigma_1(2\sigma_1 + \sigma_2^2)A_1^2 - 2(3\sigma_1 + \sigma_2^2)A_1 l_1$$
$$+ \sigma_1\sigma_2(9\sigma_1 + 7\sigma_2^2)A_1 + \sigma_2(7\sigma_1 + 4\sigma_2^2)l_1 + \sigma_1\sigma_2^2(3\sigma_1 - \sigma_2^2),$$

$$\mathfrak{z}(l_2) = -2l_1 l_2 - 2\sigma_2 l_2^2 + \sigma_2 A_1 l_1 - (5\sigma_1 + 2\sigma_2^2)A_1 l_2 - 8A_1\sigma_1^2$$
$$+ (\sigma_1 - 2\sigma_2^2)l_1 + 2\sigma_2(3\sigma_1 + 2\sigma_2^2)l_2.$$

Le equazioni differenziali (4), (6), (7) dimostrano tosto dover essere:

$$(u_1, u_2)_2 = 0,$$

$$(u_1, u_2)_4 = \tfrac{1}{12}(n_0 u_1^4 + 4 m_0 u_1^3 u_2 + 6 l_0 u_1^2 u_2^2 + 4 l_1 u_1 u_2^3 + l_2 u_2^4).$$

Ciò posto, si possono ottenere i valori dei coefficienti delle varie funzioni omogenee di grado pari che compongono lo sviluppo in serie di $S(u)$, nel modo seguente. Sia n pari e pongasi

$$(u_1, u_2)_n = C_0 u_1^n + n\, C_1 u_1^{n-1} u_2 + \frac{n(n-1)}{2} C_2 u_1^{n-2} u_2^2 + \cdots + n\, C_{n-1} u_1 u_2^{n-1} + C_n u_2^n;$$

la prima delle equazioni differenziali (10) conduce evidentemente a questa serie di relazioni:

$$n\, C_1 = 5 \frac{\partial C_0}{\partial A_1} + 2 \frac{\partial C_0}{\partial \sigma_2} + \sigma_2 \frac{\partial C_0}{\partial \sigma_1} + l_2 \frac{\partial C_0}{\partial l_1},$$

$$(n-1)\, C_2 = 5 \frac{\partial C_1}{\partial A_1} + 2 \frac{\partial C_1}{\partial \sigma_2} + \sigma_2 \frac{\partial C_1}{\partial \sigma_1} + l_2 \frac{\partial C_1}{\partial l_1},$$

. . . .

$$C_n = 5 \frac{\partial C_{n-1}}{\partial A_1} + 2 \frac{\partial C_{n-1}}{\partial \sigma_2} + \sigma_2 \frac{\partial C_{n-1}}{\partial \sigma_1} + l_2 \frac{\partial C_{n-1}}{\partial l_1},$$

$$0 = 5 \frac{\partial C_n}{\partial A_1} + 2 \frac{\partial C_n}{\partial \sigma_2} + \sigma_2 \frac{\partial C_n}{\partial \sigma_1} + l_2 \frac{\partial C_n}{\partial l_1},$$

per le quali, quando sia noto C_0, si possono derivare colle operazioni superiori i valori di tutti gli altri coefficienti.

Infine la equazione differenziale (7) trasformata dà una formola di ricursione per determinare i valori del coefficiente C_0. Suppongasi infatti sieno

$$(u_1, u_2)_{n-2} = D_0 u_1^{n-2} + (n-2) D_1 u_1^{n-3} u_2 + \cdots + D_{n-2} u_2^{n-2},$$

$$(u_1, u_2)_{n-4} = E_0 u_1^{n-4} + (n-4) E_1 u_1^{n-5} u_2 + \cdots + E_{n-4} u_2^{n-4},$$

e pongasi

$$\mathfrak{z}(D_0) = \mathfrak{z}(A_1)\frac{\partial D_0}{\partial A_1} + \mathfrak{z}(\sigma_2)\frac{\partial D_0}{\partial \sigma_2} + \mathfrak{z}(\sigma_1)\frac{\partial D_0}{\partial \sigma_1} + \mathfrak{z}(l_1)\frac{\partial D_0}{\partial l_1} + \mathfrak{z}(l_2)\frac{\partial D_0}{\partial l_2};$$

la formola di ricursione sarà

$$n(n-1) C_0 + 2(n-2)[(\sigma_0 - 3 A_3) D_0 + A_4 D_1] + n_0 E_0 = 4\, \mathfrak{z}(D_0).$$

Per mezzo di questa e delle relazioni superiori, essendo nota $(u_1, u_2)_4$, si dedurranno $(u_1, u_2)_6$, $(u_1, u_2)_8$ e così di seguito.

4 aprile 1886.

CXLVI.

SULLE PROPRIETÀ DI UNA CLASSE DI FORME BINARIE.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume II (1885-86, 1° sem.), pp. 302-305.

1. Le forme binarie d'ordine pari che consideriamo in questa Nota sono quelle le quali si presentarono in una precedente comunicazione *) nello sviluppo in serie delle funzioni theta a due argomenti.

Si è trovato in quello scritto che essendo a_0, a_1, ... a_4 le radici di una quintica

$$f(x) = x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + \cdots + A_5,$$

ed u_1, u_2 gli argomenti della funzione theta, sussistevano per una funzione $S(u_1, u_2)$ cinque equazioni differenziali parziali, due delle quali del primo ordine e le altre tre del secondo ordine.

Le equazioni differenziali del primo ordine sono:

$$\sum_0^4{}_r \frac{\partial S}{\partial a_r} = -u_1 \frac{\partial S}{\partial u_2}, \qquad \sum_0^4{}_r a_r \frac{\partial S}{\partial a_r} = \frac{1}{2}\left(3 u_1 \frac{\partial S}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial S}{\partial u_2}\right),$$

e siccome S è eguale all'unità più la somma di forme binarie di ordine pari, dal quarto ordine all'infinito, per ciascuna di quelle forme sussisteranno le due equazioni superiori; la prima delle quali è notoriamente una delle equazioni caratteristiche di un covariante della quintica.

Supposto s numero pari, sia

$$\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s)(u_1, u_2)^s$$

*) [CXLV: t. IV, pp. 1-13].

una fra quelle forme binarie. Le equazioni superiori conducono tosto alle due seguenti:

$$(1)\qquad \sum_0^4{}_r \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_r} = -(s-i)\varphi_{i+1}, \qquad \sum_0^4{}_r a_r \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_r} = \frac{3s-2i}{2}\varphi_i,$$

per la prima delle quali, quando sia noto il coefficiente φ_0, si possono dedurre gli altri per semplice derivazione.

Ciò posto, delle altre tre equazioni differenziali del secondo ordine, allo scopo di determinare i valori dei coefficienti delle successive funzioni binarie, basta considerare l'ultima.

Indicando con P il simbolo di operazione

$$P = \sum_0^4{}_r \left(a_r^4 + A_1 a_r^3 + A_2 a_r^2 + A_3 a_r + \frac{1}{2}A_4\right)\frac{\partial}{\partial a_r},$$

quella equazione prende la forma:

$$4P(S) = (n_0 u_1^2 + 2m_0 u_1 u_2 + l_0 u_2^2)S + 2(\sigma_0 u_1 + \sigma_1 u_2)\frac{\partial S}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2},$$

nella quale le n_0, m_0, l_0, σ_0, σ_1 hanno i valori indicati nella precedente comunicazione.

Consideriamo le due forme binarie precedenti alla $\varphi(u_1, u_2)$ degli ordini $s-2$, $s-4$; e sieno

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{s-2})(u_1, u_2)^{s-2}, \qquad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{s-4})(u_1, u_2)^{s-4};$$

applicando ad esse la equazione differenziale superiore, si ottiene fra i coefficienti φ_0, ψ_0, λ_0 la formola ricorrente che segue:

$$(2)\qquad s(s-1)\varphi_0 = 4P(\psi_0) - 2(s-2)\sigma_0\psi_0 - n_0\lambda_0,$$

per mezzo della quale, quando sieno noti i coefficienti λ_0, ψ_0, si deduce il valore di φ_0.

Ora, siccome per $s=6$ si ha $\lambda = 0$, e

$$\psi = -\frac{1}{3.4}(n_0 u_1^4 + 4m_0 u_1^3 u_2 + 6l_0 u_1^2 u_2^2 + 4l_1 u_1 u_2^3 + l_2 u_2^4),$$

la formola ricorrente superiore vale per la determinazione del valore del primo coefficiente di ciascuna forma binaria da quella del sesto ordine in avanti.

2. Sia $s=6$ e pongasi

$$\varphi = -\frac{1}{3.5.6}(\alpha_0 u_1^6 + 6\alpha_1 u_1^5 u_2 + \cdots + \alpha_6 u_2^6),$$

la formola (2) dà:

$$\alpha_0 = P(n_0) - 2\sigma_0 n_0,$$

od operando col simbolo P sopra n_0:

$$\alpha_0 = (A_3 - 3\sigma_0)n_0 + A_4 m_0 - 3A_5 l_0.$$

Da questa si ottengono i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ operando colla prima delle (1), e si hanno così:

$$\alpha_1 = (A_3 - 3\sigma_0)m_0 + A_4 l_0 - 3A_5 l_1,$$

$$\alpha_2 = (A_3 - 3\sigma_0)l_0 + A_4 l_1 - 3A_5 l_2,$$

e rammentando essere

$$l_0 = \sigma_2 l_1 - \sigma_1 l_2, \qquad m_0 = \sigma_2 l_0 - \sigma_1 l_1, \qquad n_0 = \sigma_2 m_0 - \sigma_1 l_0 + L,$$

posto $L = l_1^2 - l_0 l_2$, si avrà analogamente:

$$\alpha_0 = \sigma_2 \alpha_1 - \sigma_1 \alpha_2 + (A_3 - 3\sigma_0)L.$$

Sulla quale operando nuovamente colla prima delle (1) giungesi alla

$$\alpha_1 = \sigma_2 \alpha_2 - \sigma_1 \alpha_3 - \tfrac{3}{2}\sigma_1 L,$$

e ripetendo l'operazione:

$$\alpha_2 = \sigma_2 \alpha_3 - \sigma_1 \alpha_4 - \tfrac{1}{2}\sigma_2 L,$$

$$\alpha_3 = \sigma_2 \alpha_4 - \sigma_1 \alpha_5 - \tfrac{1}{2} L,$$

$$\alpha_4 = \sigma_2 \alpha_5 - \sigma_1 \alpha_6.$$

Per queste relazioni essendo

$$\alpha_5 = (A_1 + 3\sigma_2)l_1 + l_0, \qquad \alpha_6 = (A_1 - 3\sigma_2)l_2 + l_1,$$

si possono ottenere sotto altra forma i valori degli altri coefficienti della sestica.

3. Passando alla forma dell'ottavo ordine, supponendo cioè $s = 8$, saranno:

$$\lambda = -\frac{1}{3.4}(n_0 u_1^4 + \cdots), \qquad \psi = -\frac{1}{3.5.6}(\alpha_0 u_1^6 + \cdots),$$

e ponendo

$$\varphi = -\frac{1}{2.5.7}\lambda^2 - \frac{1}{4.5.7.9}(\beta_0 u_1^8 + 8\beta_1 u_1^7 u_2 + \cdots + \beta_8 u_2^8),$$

si avranno le

$$\beta_7 = (A_1 - 3\sigma_2)\alpha_5 + \alpha_4, \qquad \beta_8 = (A_1 - 3\sigma_2)\alpha_6 + \alpha_5,$$

$$\beta_5 = (A_1 - 3\sigma_2)\alpha_3 + \alpha_2 + \tfrac{1}{7}\sigma_2 L, \qquad \beta_6 = (A_1 - 3\sigma_2)\alpha_4 + \alpha_3 + \tfrac{3}{7}L,$$

e così di seguito.

4. Ne risulta che, indicando con ω, α, β, γ, δ, ... le forme binarie del 4°, 6°, 8°, ... ordine:

$$\omega = n_0 u_1^4 + 4 m_0 u_1^3 u_2 + \cdots,$$

$$\alpha = \alpha_0 u_1^6 + 6\alpha_1 u_1^5 u_2 + \cdots,$$

$$\beta = \beta_0 u_1^8 + 8\beta_1 u_1^7 u_2 + \cdots,$$

la funzione $S(u_1, u_2)$ sviluppasi come segue:

$$S = c_0 + c_1\omega + c_2\alpha + c_3\omega^2 + c_4\beta + c_5\omega\alpha + c_6\gamma + c_7\omega^3 + c_8\alpha^2 + c_9\omega\beta + c_{10}\delta + \cdots$$

nella quale c_0, c_1, ... sono coefficienti numerici aventi i valori:

$$c_0 = 1,\ c_1 = -\frac{1}{3.4},\quad c_2 = -\frac{1}{3.5.6},\quad c_3 = -\frac{1}{4.5.7.8.9},\quad c_4 = -\frac{1}{4.5.7.9},$$

$$c_5 = -\frac{1}{3.4.5.7.9.10},\qquad c_6 = -\frac{1}{5.7.9^2.10},\qquad c_7 = -\frac{1}{4^2.5^2.7.8.11},$$

$$c_8 = -\frac{1}{3.5.7.9.10.11.12},\qquad c_9 = -\frac{1}{3.4^2.5^2.7.9.11},\qquad c_{10} = -\frac{1}{3.5.7.9^2.10.11},$$

ed i primi coefficienti delle forme α, β, γ, ... si deducono da n_0 colla formola ricorrente:

$$\alpha_0 = P(n_0) - 2\sigma_0 n_0,$$

$$\beta_0 = P(\alpha_0) - 3\sigma_0\alpha_0 - 2n_0^2,$$

$$\gamma_0 = P(\beta_0) - 4\sigma_0\beta_0 - 4n_0\alpha_0,$$

$$\delta_0 = P(\gamma_0) - 5\sigma_0\gamma_0 - 6n_0\beta_0 - 3n_0^3,$$

e così via.

I valori dei coefficienti numerici c_1, c_2, c_3, ... si semplificano scrivendo la funzione S come segue:

$$S = b_0 + b_1\frac{\omega}{4!} + b_2\frac{\alpha}{6!} + b_3\frac{\omega^2}{8!} + b_4\frac{\beta}{8!} + \cdots,$$

posto $s! = 1.2.3 \dots s$. I coefficienti $b_1, b_2, b_4, b_6, b_{10}, \dots$ sono così rappresentabili colla espressione -2^{s-3}, supposto che s sia l'ordine della rispettiva forma, e si hanno per gli altri i seguenti valori:

$$b_3 = -2^2,\ b_5 = -6.2.8,\ b_7 = -3^5.2^3,\ b_8 = -6.8^2,\ b_9 = -9.2.32, \text{ ecc.}$$

18 aprile 1886.

CXLVII.

SOPRA UNA FORMOLA DI TRASFORMAZIONE DI INTEGRALI MULTIPLI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume II (1885-86, 2° sem.), pp. 111-117.

1. Posto

$$f(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{2n}),$$

$$(1) \quad u_1 = \sum_1^n {}_s \int_{a_{2s-1}}^{x_s} \frac{f_1(x)}{2t} dx, \qquad u_2 = \sum_1^n {}_s \int_{a_{2s-1}}^{x_s} \frac{f_2(x)}{2t} dx, \dots u_n = \sum_1^n {}_s \int_{a_{2s-1}}^{x_s} \frac{f_n(x)}{2t} dx,$$

essendo $t = \sqrt{f(x)}$ ed $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ polinomj in x del grado $n - 1$, si dimostra facilmente che, indicando con $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots a_{r_n}$ n qualisivogliano fra quelle quantità $a_0, a_1, \dots a_{2n}$ e rappresentando con D il determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1(a_{r_1}) & f_1(a_{r_2}) & \dots & f_1(a_{r_n}) \\ f_2(a_{r_1}) & f_2(a_{r_2}) & \dots & f_2(a_{r_n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_{r_1}) & f_n(a_{r_2}) & \dots & f_n(a_{r_n}) \end{vmatrix},$$

si ottengono dalle (1) le seguenti:

$$\frac{\partial x_s}{\partial u_1} = \frac{2t_s}{D\varphi'(x_s)} \left[\frac{\varphi(a_{r_1})}{a_{r_1} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_1(a_{r_1})} + \frac{\varphi(a_{r_2})}{a_{r_2} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_1(a_{r_2})} + \dots + \frac{\varphi(a_{r_n})}{a_{r_n} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_1(a_{r_n})} \right],$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial u_2} = \frac{2t_s}{D\varphi'(x_s)} \left[\frac{\varphi(a_{r_1})}{a_{r_1} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_2(a_{r_1})} + \frac{\varphi(a_{r_2})}{a_{r_2} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_2(a_{r_2})} + \dots + \frac{\varphi(a_{r_n})}{a_{r_n} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_2(a_{r_n})} \right],$$

. . . .

$$\frac{\partial x_s}{\partial u_n} = \frac{2t_s}{D\varphi'(x_s)} \left[\frac{\varphi(a_{r_1})}{a_{r_1} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_n(a_{r_1})} + \frac{\varphi(a_{r_2})}{a_{r_2} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_n(a_{r_2})} + \dots + \frac{\varphi(a_{r_n})}{a_{r_n} - x_s} \frac{\partial D}{\partial f_n(a_{r_n})} \right],$$

ed in queste:

$$t_s = \sqrt{f(x_s)}\,, \qquad \varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)\,.$$

Ne risulta che, essendo r uno degli indici $r_1, r_2, \ldots r_n$, deducesi dalle superiori la

$$(2) \qquad f_1(a_r)\frac{\partial x_s}{\partial u_1} + f_2(a_r)\frac{\partial x_s}{\partial u_2} + \cdots + f_n(a_r)\frac{\partial x_s}{\partial u_n} = \frac{2t_s}{\varphi'(x_s)}\,\frac{\varphi(a_r)}{a_r - x_s}\,,$$

nella quale può porsi: $r = r_1, r_2, \ldots r_n$; $s = 1, 2, \ldots n$.

Sia

$$p_m(u_1, u_2, \ldots u_n) = \sqrt{(a_m - x_1)(a_m - x_2) \ldots (a_m - x_n)} = \sqrt{\varphi(a_m)}$$

una delle $2n + 1$ funzioni iperellittiche ad un indice; si avranno le

$$\frac{\partial p_m}{\partial u_1} = \sum_1^n{}_s \frac{\partial p_m}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\,, \quad \frac{\partial p_m}{\partial u_2} = \sum_1^n{}_s \frac{\partial p_m}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial u_2}\,, \ldots \frac{\partial p_m}{\partial u_n} = \sum_1^n{}_s \frac{\partial p_m}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial u_n}\,,$$

e siccome

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_s} = -\frac{1}{2}\,\frac{p_m}{a_m - x_s}\,,$$

si avrà dalla (2) la seguente:

$$f_1(a_r)\frac{\partial p_m}{\partial u_1} + f_2(a_r)\frac{\partial p_m}{\partial u_2} + \cdots + f_n(a_r)\frac{\partial p_m}{\partial u_n} = -p_r^2 p_m \sum_1^n{}_s \frac{t_s}{(a_r - x_s)(a_m - x_s)\varphi'(x_s)}\,,$$

da cui, supponendo r, m disuguali fra loro, e ponendo

$$p_{rm}(u_1, u_2, \ldots u_n) = p_r p_m \sum_1^n{}_s \frac{t_s}{(a_r - x_s)(a_m - x_s)\varphi'(x_s)}\,,$$

cioè $p_{rm} = p_{mr}$ una delle $n(2n + 1)$ funzioni iperellittiche a due indici, si otterrà la relazione generale:

$$(3) \qquad f_1(a_r)\frac{\partial p_m}{\partial u_1} + f_2(a_r)\frac{\partial p_m}{\partial u_2} + \cdots + f_n(a_r)\frac{\partial p_m}{\partial u_n} = -p_r p_{mr}\,.$$

Sieno $m_1, m_2, \ldots m_n$ n fra gli indici $0, 1, 2, \ldots 2n$ differenti fra loro e differenti da $r_1, r_2, \ldots r_n$; indicando con P, Q i due determinanti

$$(4) \qquad P = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{m_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{m_1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial p_{m_1}}{\partial u_n} \\ \frac{\partial p_{m_2}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{m_2}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial p_{m_2}}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_{m_n}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{m_n}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial p_{m_n}}{\partial u_n} \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} p_{m_1 r_1} & p_{m_2 r_1} & \cdots & p_{m_n r_1} \\ p_{m_1 r_2} & p_{m_2 r_2} & \cdots & p_{m_n r_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m_1 r_n} & p_{m_2 r_n} & \cdots & p_{m_n r_n} \end{vmatrix},$$

la relazione (3) e le analoghe conducono tosto alla formola:

$$DP = (-1)^n p_{r_1} p_{r_2} \cdots p_{r_n} Q. \tag{5}$$

2. È noto che fra le funzioni iperellittiche ad uno ed a due indici esiste un determinato numero di relazioni quadratiche. Abbiamo nel n° precedente indicati con $r_1, r_2, \ldots r_n$; $m_1, m_2, \ldots m_n$ $2n$ fra gli indici 0, 1, 2, ... $2n$; indichiamo ora con s l'ultimo di essi, e poniamo:

$$g(x) = (x - a_s)(x - a_{m_1}) \ldots (x - a_{m_n}),$$

$$h(x) = (x - a_{r_1})(x - a_{r_2}) \ldots (x - a_{r_n}),$$

sicchè:

$$f(x) = g(x) h(x).$$

Ciò posto, si hanno dapprima le relazioni della forma seguente:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{p_s^2}{g'(a_s)} + \frac{p_{m_1}^2}{g'(a_{m_1})} + \frac{p_{m_2}^2}{g'(a_{m_2})} + \cdots + \frac{p_{m_n}^2}{g'(a_{m_n})} = 1, \\ &\frac{p_s p_{sr}}{g'(a_s)} + \frac{p_{m_1} p_{m_1 r}}{g'(a_{m_1})} + \frac{p_{m_2} p_{m_2 r}}{g'(a_{m_2})} + \cdots + \frac{p_{m_n} p_{m_n r}}{g'(a_{m_n})} = 0, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

nella seconda delle quali r può assumere i valori $r_1, r_2, \ldots r_n$.

Si hanno poi le seguenti fra sole funzioni iperellittiche a due indici e cioè:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{p_{sr}^2}{g'(a_s)} + \frac{p_{m_1 r}^2}{g'(a_{m_1})} + \frac{p_{m_2 r}^2}{g'(a_{m_2})} + \cdots + \frac{p_{m_n r}^2}{g'(a_{m_n})} = h'(a_r), \\ &\frac{p_{sr_1} p_{sr_2}}{g'(a_s)} + \frac{p_{m_1 r_1} p_{m_1 r_2}}{g'(a_{m_1})} + \cdots + \frac{p_{m_n r_1} p_{m_n r_2}}{g'(a_{m_n})} = 0, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

nella prima delle quali r prende i valori $r_1, r_2, \ldots r_n$ e nella seconda si possono porre le combinazioni a due a due degli indici stessi. Per mezzo di queste relazioni (6), (7), in numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, si può determinare il valore del determinante seguente:

$$R = \begin{vmatrix} p_s & p_{m_1} & p_{m_2} & \cdots & p_{m_n} \\ p_{sr_1} & p_{m_1 r_1} & p_{m_2 r_1} & \cdots & p_{m_n r_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{sr_n} & p_{m_1 r_n} & p_{m_2 r_n} & \cdots & p_{m_n r_n} \end{vmatrix},$$

e trovasi facilmente essere

$$R = C,$$

posto C eguale alla costante che segue:

$$C = [g'(a_s)g'(a_{m_1}) \ldots g'(a_{m_n})h'(a_{r_1}) \ldots h'(a_{r_n})]^{\frac{1}{2}} = \Delta_g^{\frac{1}{2}}\Delta_h^{\frac{1}{2}},$$

indicando con Δ_g, Δ_h i discriminanti delle funzioni $g(x)$, $h(x)$. Per questa proprietà del determinante R, e dalle relazioni (6) deducesi quest'altra

$$\frac{R}{g'(a_s)} p_s = Q,$$

essendo Q il determinante superiore (4). Si avrà così dalla equazione (5):

$$P = (-1)^n \frac{C}{D g'(a_s)} \cdot p_s p_{r_1} p_{r_2} \ldots p_{r_n}, \tag{8}$$

cioè il determinante funzionale di n funzioni iperellittiche ad un indice è eguale ad una costante pel prodotto delle altre $n+1$ funzioni iperellittiche della stessa specie.

Ma indicando con $k(x)$ il prodotto

$$k(x) = (x - a_{m_1})(x - a_{m_2}) \ldots (x - a_{m_n}),$$

per cui $g(x) = (x - a_s)k(x)$, la prima delle relazioni (6) può scriversi:

$$p_s^2 = k(a_s)\left[1 + \frac{p_{m_1}^2}{(s\,m_1)k'(a_{m_1})} + \cdots + \frac{p_{m_n}^2}{(s\,m_n)k'(a_{m_n})}\right],$$

posto $(s\,m_1) = a_s - a_{m_1}$; e siccome in quest'ultima relazione possiamo sostituire ad s uno qualsivoglia degli indici $r_1, r_2, \ldots r_n$, si avrà che quelle $n+1$ funzioni iperellittiche $p_s, p_{r_1}, p_{r_2}, \ldots p_{r_n}$ si possono esprimere per funzioni irrazionali del secondo grado delle altre n.

3. Si osservi che il determinante D è eguale al prodotto di due determinanti, dei quali l'uno funzione dei soli coefficienti delle funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ e l'altro che eguaglia la radice quadrata del discriminante di $h(x)$, si ha cioè:

$$D = (-1)^{\frac{n}{2}} K \Delta_h^{\frac{1}{2}},$$

dove K è quel primo determinante; si avrà quindi:

$$\frac{C}{Dg'(a_s)} = \frac{1}{K}[k'(a_{m_1})k'(a_{m_2}) \ldots k'(a_{m_n})]^{\frac{1}{2}}.$$

Ponendo ora

$$p_{m_1} = \sqrt{y_1 k'(a_{m_1})}, \quad p_{m_2} = \sqrt{y_2 k'(a_{m_2})}, \quad \ldots \quad p_{m_n} = \sqrt{y_n k'(a_{m_n})},$$

e rappresentando con U il determinante

$$U = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial u_1} & \frac{\partial y_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

dalla relazione (8) si deduce tosto la seguente:

$$K.U = (-1)^n . 2^n . \sqrt{y_1 y_2 \ldots y_n} . p_s p_{r_1} \ldots p_{r_n},$$

ossia, ponendo

$$p_{r_1} = \sqrt{y_{n+1} k(a_{r_1})}, \quad \ldots \quad p_{r_n} = \sqrt{y_{2n} k(a_{r_n})}, \quad p_s = \sqrt{y_{2n+1} k(a_s)},$$

si avrà:

$$K.U = (-1)^n . 2^n \sqrt{y_1 y_2 \ldots y_{2n+1}},$$

essendo $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots y_{2n+1}$ funzioni lineari di $y_1, y_2, \ldots y_n$; ossia:

$$y_{n+1} = 1 + \frac{y_1}{(r_1 m_1)} + \frac{y_2}{(r_1 m_2)} + \cdots + \frac{y_n}{(r_1 m_n)},$$

$$y_{n+2} = 1 + \frac{y_1}{(r_2 m_1)} + \frac{y_2}{(r_2 m_2)} + \cdots + \frac{y_n}{(r_2 m_n)},$$

e così di seguito.

Se infine rammentasi la nota formola di trasformazione per gli integrali multipli

$$dy_1 dy_2 \ldots dy_n = U du_1 du_2 \ldots du_n,$$

si otterrà la formola:

$$(9)\qquad du_1\,du_2\,\ldots\,du_n = \frac{(-1)^n}{2^n} K \frac{dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_n}{[y_1 y_2 \ldots y_{2n+1}]^{\frac{1}{2}}}.$$

Analogamente indicando con V il determinante

$$V = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

si ha:

$$dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n = V\,du_1\,du_2\,\ldots\,du_n;$$

e quindi per le relazioni (2) essendo

$$V = (-1)^n \frac{2^n}{K} \frac{t_1 t_2 \ldots t_n}{[\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)\ldots\varphi'(x_n)]^{\frac{1}{2}}},$$

si avrà la seconda formola:

$$(10)\qquad du_1\,du_2\,\ldots\,du_n = \frac{(-1)^n}{2^n} K \frac{[\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)\ldots\varphi'(x_n)]^{\frac{1}{2}}}{t_1 t_2 \ldots t_n} dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n.$$

Dalle formole (9), (10) si deduce il seguente

TEOREMA. — *L'integrale ennuplo*

$$\frac{\Delta\, dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n}{[f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)]^{\frac{1}{2}}},$$

in cui

$$f(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{2n}),$$

e Δ *è il prodotto delle differenze a due a due delle quantità* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *si trasforma nell'integrale ennuplo*

$$\frac{dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_n}{\sqrt{F(y_1, y_2, \ldots y_n)}},$$

nel quale la funzione $F(y_1, y_2, \ldots y_n)$ *è il prodotto di* $2n+1$ *funzioni lineari di* y_1,

$y_2, \dots y_n$ *della forma* $A_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$, *essendo*

$$y_1 = \frac{(a_{m_1} - x_1)(a_{m_1} - x_2) \dots (a_{m_1} - x_n)}{(a_{m_1} - a_{m_2})(a_{m_1} - a_{m_3}) \dots (a_{m_1} - a_{m_n})},$$

ed analogamente per $y_2, \dots y_n$; *infine* $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots a_{m_n}$ *sono* n *qualisivogliano fra le quantità* $a_0, a_1, \dots a_{2n}$.

Pel caso di $n = 2$ questo teorema era dimostrato, siccome applicazione del teorema di ABEL agli integrali doppi, in una delle lettere dirette a JACOBI dal prof. ROSENHAIN *). Così pure la formola di trasformazione (9), pel caso di $n = 2$, fu dimostrata per mezzo delle funzioni theta a due variabili dal sig. SCHEIBNER nella sua Memoria: *Ueber eine Transformationsformel für Doppel-Integrale* **).

4. Nella formola di trasformazione (9), come nei due casi particolari precedentemente citati, si sono considerate soltanto funzioni iperellittiche ad un solo indice. Ma si possono dare molte combinazioni di $2n + 1$ funzioni iperellittiche ad uno, a due, a più indici, le quali conducono ad analoghe formole di trasformazione. Infatti, essendo in generale per le funzioni p_{mn} a doppio indice

$$f_1(a_r)\frac{\partial p_{mn}}{\partial u_1} + f_2(a_r)\frac{\partial p_{mn}}{\partial u_2} + \cdots + f_n(a_r)\frac{\partial p_{mn}}{\partial u_n} = - p_{mr} p_{nr},$$

se si considera il determinante

$$S = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{m_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{m_1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial p_{m_1}}{\partial u_n} \\ \frac{\partial p_{m_1 m_2}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{m_1 m_2}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial p_{m_1 m_2}}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_{m_1 m_n}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{m_1 m_n}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial p_{m_1 m_n}}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

e lo si moltiplica per D, si ottiene:

$$SD = (-1)^n p_{m_1 r_1} p_{m_1 r_2} \dots p_{m_1 r_n} T,$$

*) *Auszug mehrerer Schreiben des Dr.* ROSENHAIN *an Herrn Prof.* JACOBI *über die hyperelliptischen Transcendenten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XL (1850), pp. 319-360 (Lettera II, pp. 329-334)].

**) [Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, t. XXXVI (1884), pp. 185-192].

posto

$$T = \begin{vmatrix} p_{r_1} & p_{r_2} & \dots & p_{r_n} \\ p_{m_2 r_1} & p_{m_2 r_2} & \dots & p_{m_2 r_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m_n r_1} & p_{m_n r_2} & \dots & p_{m_n r_n} \end{vmatrix},$$

ed operando come al n° 2 si giunge ad un'altra formola di trasformazione affatto analoga alla (9).

Settembre, 1886.

CXLVIII.

SULLE FUNZIONI SIGMA IPERELLITTICHE.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume III (1887, 1° sem.), pp. 245-250, 311-315.

NOTA I.

1. In una Nota che ebbi l'onore di presentare lo scorso anno all'Accademia *), ho dimostrato quanto segue. Si ponga

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{x_1} \frac{dx}{t} + \frac{1}{2}\int_{a_3}^{x_2} \frac{dx}{t}, \qquad u_2 = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{x_1} \frac{x\,dx}{t} + \frac{1}{2}\int_{a_3}^{x_2} \frac{x\,dx}{t},$$

essendo

$$t = \sqrt{f(x)} = \prod_{0}^{4}{}_r (x - a_r)^{\frac{1}{2}},$$

e si indichi con $\Theta(u_1, u_2)$, o semplicemente con Θ, una funzione di u_1, u_2 per la quale sussistano le relazioni:

$$\frac{\partial \log \Theta}{\partial u_1} = -\frac{1}{2}\int_{a_1}^{x_1} \frac{g(x)\,dx}{t} - \frac{1}{2}\int_{a_3}^{x_2} \frac{g(x)\,dx}{t} + \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2},$$

$$\frac{\partial \log \Theta}{\partial u_2} = -\frac{1}{2}\int_{a_1}^{x_1} \frac{x^2\,dx}{t} - \frac{1}{2}\int_{a_3}^{x_2} \frac{x^2\,dx}{t},$$

*) [CXLV: tomo IV, pp. 1-13].

nella prima delle quali, supposto

$$f(x) = x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5,$$

si ha

$$g(x) = 3x^3 + 2A_1 x^2 + A_2 x,$$

e t_1, t_2 sono i valori di t corrispondenti ad $x = x_1$, $x = x_2$.

Sia $p_r(u_1, u_2)$ una funzione di u_1, u_2 definita dalla

$$p_r = (a_r - x_1)^{\frac{1}{2}} (a_r - x_2)^{\frac{1}{2}},$$

e $p_{rs}(u_1, u_2)$ la funzione

$$p_{rs} = \frac{p_r p_s}{x_1 - x_2} \left[\frac{t_1}{(a_r - x_1)(a_s - x_1)} - \frac{t_2}{(a_r - x_2)(a_s - x_2)} \right],$$

si ottengono le due seguenti formole:

$$(1) \qquad p_r^2 = a_r^2 + \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u_1 d u_2} + a_r \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u_2^2},$$

$$(2) \qquad p_{rs}^2 = K_{rs} - \left[\frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u_1^2} + (a_r + a_s) \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r a_s \frac{\partial^2 \log \Theta}{\partial u_2^2} \right],$$

nelle quali a_r, a_s sono due qualsivogliano fra le a_0, a_1, ... a_4 e K_{rs} è costante:

$$K_{rs} = (a_r + a_s)^3 - a_r a_s (a_r + a_s) + A_1 (a_r + a_s)^2 + A_2 (a_r + a_s) + A_3.$$

Evidentemente si avranno cinque funzioni p_r e dieci funzioni p_{rs}.

2. Supposto a_r, a_s, a_m differenti fra loro, sono note le due relazioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_r}{\partial u_1} + a_s \dfrac{\partial p_r}{\partial u_2} = - p_s p_{rs}, \\[2ex] \dfrac{\partial p_{rs}}{\partial u_1} + a_m \dfrac{\partial p_{rs}}{\partial u_2} = - p_{rm} p_{sm}. \end{cases}$$

Dalla prima di queste si ottengono le due:

$$\frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1^2} + a_s \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1 \partial u_2} = - \frac{1}{p_r} \left(p_s \frac{\partial p_{rs}}{\partial u_1} + p_{rs} \frac{\partial p_s}{\partial u_1} \right) + \frac{p_s p_{rs}}{p_r^2} \frac{\partial p_r}{\partial u_1},$$

$$\frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1 \partial u_2} + a_s \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_2^2} = - \frac{1}{p_r} \left(p_s \frac{\partial p_{rs}}{\partial u_2} + p_{rs} \frac{\partial p_s}{\partial u_2} \right) + \frac{p_s p_{rs}}{p_r^2} \frac{\partial p_r}{\partial u_2},$$

le quali sommate, dopo avere moltiplicato per a_m la seconda, conducono alla

$$\frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1^2} + (a_s + a_m)\frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1 \partial u_2} + a_s a_m \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_2^2}$$

$$= \frac{1}{p_r^2}[p_r p_{sm}(p_s p_{rm} + p_m p_{rs}) - p_m p_s p_{rm} p_{rs}].$$

Ora:

$$p_s p_{rm} = p_r p_{sm} + (rs)p_{\lambda\mu}, \qquad p_m p_{rs} = p_r p_{sm} + (rm)p_{\lambda\mu},$$

indicando con a_λ, a_μ le ultime due fra le cinque quantità $a_0, a_1, \ldots a_4$, e scrivendo per brevità $(rs) = a_r - a_s$, $(rm) = a_r - a_m$. Sostituendo, si otterrà quindi la prima relazione:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1^2} + (a_s + a_m)\frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1 \partial u_2} + a_s a_m \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_2^2} = p_{sm}^2 - (rs)(rm)\frac{p_{\lambda\mu}^2}{p_r^2}.$$

Per una stessa funzione p_r si avranno evidentemente sei relazioni analoghe alla superiore, quante sono le combinazioni a due a due delle quattro quantità a_s, a_m, a_λ, a_μ; tre di esse sono però conseguenza delle altre. Permutando in questa gli indici s, λ e sottraendo da essa quella che ottiensi colla indicata permutazione, si ha:

$$(s\lambda)\left(\frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1 \partial u_2} + a_m \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_2^2}\right) = p_{sm}^2 - p_{\lambda m}^2 - \frac{(rm)}{p_r^2}[(rs)p_{\lambda\mu}^2 - (r\lambda)p_{s\mu}^2],$$

ossia:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1 \partial u_2} + a_m \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_2^2} = (rm)\frac{p_{rm}^2}{p_r^2} - p_m^2.$$

Si permuti nuovamente in quest'ultima l'indice m coll'indice μ, e moltiplicata la stessa per $a_r - a_\mu$ vi si aggiunga quella che ottiensi dalla permutazione moltiplicata per $a_m - a_r$; dopo facili riduzioni si giunge alla

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r \frac{\partial^2 \log p_r}{\partial u_2^2} = \frac{f'(a_r)}{p_r^2} - p_r^2.$$

Affatto analogamente per la seconda relazione (3) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_1^2} + (a_\lambda + a_\mu)\frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_1 \partial u_2} + a_\lambda a_\mu \frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_2^2}$$

$$= \frac{1}{p_{rs}^2}[p_{rs}p_{\lambda\mu}(p_{r\lambda}p_{s\mu} + p_{s\lambda}p_{r\mu}) - p_{r\lambda}p_{s\lambda}p_{r\mu}p_{s\mu}];$$

ma:

$$p_{s\lambda}p_{r\mu} = p_{rs}p_{\lambda\mu} - (\lambda r)(\mu s)p_m, \qquad p_{r\lambda}p_{s\mu} = p_{rs}p_{\lambda\mu} - (\lambda s)(\mu r)p_m;$$

quindi sostituendo:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_1^2} + (a_\lambda + a_\mu)\frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_1 \partial u_2} + a_\lambda a_\mu \frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_2^2} = p_{\lambda\mu}^2 - (\lambda r)(\lambda s)(\mu r)(\mu s)\frac{p_m^2}{p_{rs}^2},$$

e per una stessa funzione p_{rs} si avranno tre relazioni della stessa specie.

Permutando in questa gli indici λ, m; poi gli indici μ, m; e moltiplicando le tre equazioni, la prima per $(\lambda\mu)(mr)(ms)$, la seconda per $(\mu m)(\lambda r)(\lambda s)$, l'ultima per $(m\lambda)(\mu r)(\mu s)$, e sommandole si giunge alla

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_1^2} + (a_r + a_s)\frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r a_s \frac{\partial^2 \log p_{rs}}{\partial u_2^2} = p_{rs}^2 + \frac{f'(a_r)f'(a_s)}{(a_r - a_s)^2 p_{rs}^2}.$$

3. Nelle relazioni (1), (2) sostituiamo alla funzione $\Theta(u_1, u_2)$ una funzione $\sigma(u_1, u_2)$, che denomineremo la sigma fondamentale, legata alla prima dalla relazione:

$$(9) \quad \sigma(u_1, u_2) = e^{\frac{1}{2}D}\frac{\Theta(u_1, u_2)}{\Theta(0)},$$

posto

$$D = \tfrac{1}{5}(2A_3 u_1^2 + A_2 u_1 u_2 + 2A_1 u_2^2),$$

ed essendo A_1, A_2, A_3 i coefficienti del 2°, 3°, 4° termine della funzione $f(x)$. Si otterranno le

$$(10) \quad \begin{cases} p_r^2 = m_r + \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_2^2}, \\ p_{rs}^2 = m_{rs} - \left[\dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1^2} + (a_r + a_s)\dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r a_s \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_2^2}\right], \end{cases}$$

e le costanti m_r, m_{rs} avranno i valori:

$$(11) \quad \begin{cases} m_r = \frac{1}{10}(10 a_r^2 + 4A_1 a_r + A_2), \\ m_{rs} = K_{rs} - \frac{1}{10}[4A_1 a_r a_s + A_2(a_r + a_s) + 4A_3]. \end{cases}$$

Se ora poniamo

$$p_r(u_1, u_2) = C_r \frac{\sigma_r(u_1, u_2)}{\sigma(u_1, u_2)}, \qquad p_{rs}(u_1, u_2) = C_{rs}\frac{\sigma_{rs}(u_1, u_2)}{\sigma(u_1, u_2)},$$

nelle quali C_r, C_{rs} sono nuove costanti di cui i valori saranno dati più avanti, dalle equazioni (6), (8), (10) si deducono le due seguenti:

$$(12)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \sigma_r}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r \dfrac{\partial^2 \log \sigma_r}{\partial u_2^2} = \dfrac{f'(a_r)}{C_r^2} \dfrac{\sigma^2(u)}{\sigma_r^2(u)} - m_r, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma_{rs}}{\partial u_1^2} + (a_r + a_s) \dfrac{\partial^2 \log \sigma_{rs}}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r a_s \dfrac{\partial^2 \log \sigma_{rs}}{\partial u_2^2} = \dfrac{f'(a_r) f'(a_s)}{(a_r - a_s)^2 C_{rs}^2} \dfrac{\sigma^2(u)}{\sigma_{rs}^2(u)} + m_{rs}, \end{cases}$$

mentre le (10) darebbero:

$$(13)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_2^2} = C_r^2 \dfrac{\sigma_r^2(u)}{\sigma^2(u)} - m_r, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1^2} + (a_r + a_s) \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r a_s \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_2^2} = m_{rs} - C_{rs}^2 \dfrac{\sigma_{rs}^2(u)}{\sigma^2(u)}. \end{cases}$$

Dalle equazioni (13) e da quella, che ottiensi sostituendo nella prima di esse l'indice s all'indice r, si ottengono i seguenti valori:

$$(14)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_2^2} = \dfrac{1}{a_r - a_s}\left(C_r^2 \dfrac{\sigma_r^2}{\sigma^2} - C_s^2 \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma^2}\right) + \gamma_{rs}, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1 \partial u_2} = \dfrac{1}{a_r - a_s}\left(C_s^2 a_r \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma^2} - C_r^2 a_s \dfrac{\sigma_r^2}{\sigma^2}\right) + \beta_{rs}, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u_1^2} = - C_{rs}^2 \dfrac{\sigma_{rs}^2}{\sigma^2} + \dfrac{1}{a_r - a_s}\left(C_r^2 a_s^2 \dfrac{\sigma_r^2}{\sigma^2} - C_s^2 a_r^2 \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma^2}\right) + \alpha_{rs}, \end{cases}$$

essendo

$$(15)\quad \gamma_{rs} = \frac{m_s - m_r}{a_r - a_s}, \qquad \beta_{rs} = \frac{a_s m_r - a_r m_s}{a_r - a_s}, \qquad \alpha_{rs} = m_{rs} + \frac{a_r^2 m_s - a_s^2 m_r}{a_r - a_s}.$$

Le tre costanti sopra definite hanno una importante proprietà. Si considerino le due forme binarie cubiche

$$\varphi(z_1, z_2) = z_1(z_2 - a_r z_1)(z_2 - a_s z_1),$$
$$\psi(z_1, z_2) = (z_2 - a_m z_1)(z_2 - a_\lambda z_1)(z_2 - a_\mu z_1),$$

e si indichi con $(\varphi\psi)_2$ il loro covariante simultaneo quadratico; si ha:

$$(\varphi\psi)_2 = \tfrac{5}{9}(\alpha_{rs} z_1^2 + 2\beta_{rs} z_1 z_2 + \gamma_{rs} z_2^2).$$

Le forme quadratiche $(\varphi\psi)_2$ sono evidentemente in numero di dieci, e pei coef-

ficienti di esse sussiste la proprietà:

$$\sum \alpha_{rs} = 0, \qquad \sum \beta_{rs} = 0, \qquad \sum \gamma_{rs} = 0,$$

nelle quali il simbolo di sommatoria si estende ai dieci valori.

Equazioni simili alle (14) si possono ottenere per tutte le funzioni sigma nel modo seguente. Dalla equazione (5), nella quale si sostituisca s ad m, e dalla (6) si deducono, per le (14), le due relazioni:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \sigma_r}{\partial u_2^2} &= \frac{f'(a_r)}{(a_r - a_s) C_r^2} \frac{\sigma^2}{\sigma_r^2} - \frac{C_{rs}^2}{C_r^2} \frac{\sigma_{rs}^2}{\sigma_r^2} + \gamma_{rs}, \\ \frac{\partial^2 \log \sigma_r}{\partial u_1 \partial u_2} &= - \frac{f'(a_r)}{(a_r - a_s) C_r^2} a_s \frac{\sigma^2}{\sigma_r^2} + \frac{C_{rs}^2}{C_r^2} a_r \frac{\sigma_{rs}^2}{\sigma_r^2} + \beta_{rs}; \end{aligned} \right.$$

e quindi dalla (4), dopo alcune riduzioni, la terza:

$$\frac{\partial^2 \log \sigma_r}{\partial u_1^2} = \frac{f'(a_r)}{(a_r - a_s) C_r^2} a^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_r^2} - \frac{C_{rs}^2}{C_r^2} a_r^2 \frac{\sigma_{rs}^2}{\sigma_r^2} - \frac{f'(a_r) C_s^2}{(a_r - a_s) C_r^2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_r^2} + \alpha_{rs}.$$

Così dalla equazione (7) e dalle altre due che possono dedursi da essa colle permutazioni λ, m; μ, m; si ottengono le tre seguenti:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \sigma_{rs}}{\partial u_2^2} &= \frac{(mr) C_{\lambda\mu}^2}{C_{rs}^2} \frac{\sigma_{\lambda\mu}^2}{\sigma_{rs}^2} + \frac{(\mu s) C_{\lambda r}^2}{C_{rs}^2} \frac{\sigma_{\lambda r}^2}{\sigma_{rs}^2} - \frac{(mr)(\mu r)(\lambda s)(\mu s)}{C_{rs}^2} \frac{\sigma^2}{\sigma_{rs}^2} + \gamma_{m\mu}, \\ \frac{\partial^2 \log \sigma_{rs}}{\partial u_1 \partial u_2} &= \frac{(rm) C_{\lambda\mu}^2}{C_{rs}^2} a_s \frac{\sigma_{\lambda\mu}^2}{\sigma_{rs}^2} + \frac{(s\mu) C_{\lambda r}^2}{C_{rs}^2} a_m \frac{\sigma_{\lambda r}^2}{\sigma_{rs}^2} + \frac{(mr)(\mu r)(\lambda s)(\mu s)}{C_{rs}^2} a_m \frac{\sigma^2}{\sigma_{rs}^2} + \beta_{m\mu}, \\ \frac{\partial^2 \log \sigma_{rs}}{\partial u_1^2} &= \frac{(mr) C_{\lambda\mu}^2}{C_{rs}^2} a_s^2 \frac{\sigma_{\lambda\mu}^2}{\sigma_{rs}^2} + \frac{(\mu s) C_{\lambda r}^2}{C_{rs}^2} a_m^2 \frac{\sigma_{\lambda r}^2}{\sigma_{rs}^2} - \frac{(mr)(\mu r)(\lambda s)(\mu s)}{C_{rs}^2} a_m^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_{rs}^2} \\ &\quad - (mr)(ms)(\mu s) \left[\frac{C_{\lambda\mu}^2}{C_{rs}^2} \frac{\sigma_{\lambda\mu}^2}{\sigma_{rs}^2} + \frac{(\mu r) C_\lambda^2}{C_{rs}^2} \frac{\sigma_\lambda^2}{\sigma_{rs}^2} \right] + \alpha_{m\mu}, \end{aligned} \right.$$

notando essere

$$\gamma_{rs} + (rm) = \gamma_{sm}, \qquad \gamma_{sm} + (s\mu) = \gamma_{m\mu}, \text{ ecc.}$$

I valori delle costanti C si ottengono osservando che le dieci funzioni sigma pari sono, per $u_1 = u_2 = 0$, eguali alla unità; e per le sigma dispari è la derivata di σ

rispetto ad u_2, per $u_1 = u_2 = 0$, pure eguale all'unità, ad eccezione della funzione σ_{13}, per la quale è $\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial u_1}\right)_0 = 1$ *).

Le equazioni (14), (16), (17) corrispondono alle (10) del § 25 delle *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* pubblicate dal prof. SCHWARZ **).

3 aprile 1887.

NOTA II.

1. I covarianti simultanei quadratici $(\varphi\psi)_2$ considerati di sopra corrispondono per le funzioni sigma iperellittiche alle quantità denominate e_1, e_2, e_3 dal sig. WEIERSTRASS per le funzioni sigma ellittiche. Seguendo quindi l'ordinaria notazione delle funzioni theta iperellittiche pari a due argomenti, indicheremo con ε, ε_0, ε_2, ε_4, ε_{01}, ε_{03}, ε_{12}, ε_{14}, ε_{23}, ε_{34}, le dieci forme quadratiche

$$\alpha_{rs}\zeta_1^2 + 2\beta_{rs}\zeta_1\zeta_2 + \gamma_{rs}\zeta_2^2$$

pei seguenti valori di r e di s: $r = 1$, $s = 3$; $r = 2$, $s = 4$; $r = 4$, $s = 0$; $r = 0$, $s = 2$; $r = 0$, $s = 3$; $r = 0$, $s = 1$; $r = 2$, $s = 3$; $r = 4$, $s = 3$; $r = 2$, $s = 1$; $r = 4$, $s = 1$; o reciprocamente.

Notiamo dapprima che, indicando con a_r, a_s, a_m, a_λ, a_μ le cinque quantità a_0, a_1, ... a_4, i coefficienti α_{rs}, β_{rs}, γ_{rs} hanno i seguenti valori:

$$\alpha_{rs} = -a_m a_\lambda a_\mu - a_r a_s(a_m + a_\lambda + a_\mu) - \tfrac{2}{5}A_3,$$

$$\beta_{rs} = a_r a_s - \tfrac{1}{10}A_2, \qquad \gamma_{rs} = -(a_r + a_s) - \tfrac{2}{5}A_1,$$

od anche:

$$\alpha_{rs} = (a_r + a_s)^3 - a_r a_s(a_r + a_s) + A_1(a_r + a_s)^2 + A_2(a_r + a_s) + \tfrac{3}{5}A_3.$$

Questi valori conducono alle relazioni:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{rs} - \alpha_{\lambda\mu} = a_\lambda a_\mu(a_r + a_s) - a_r a_s(a_\lambda + a_\mu), \\ \beta_{rs} - \beta_{\lambda\mu} = a_r a_s - a_\lambda a_\mu, \qquad \gamma_{rs} - \gamma_{\lambda\mu} = a_\lambda + a_\mu - a_r - a_s, \end{array}\right.$$

*) V. la mia Memoria: *Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine* [LXXXIX: t. II, pp. 345-454 (pag. 408, 410)].

**) Göttingen, 1885.

supposto r, s; λ, μ disuguali; ed alle

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_{rs} - \alpha_{rm} = (a_s - a_m)[a_\lambda a_\mu - a_r(a_\lambda + a_\mu)], \\ \beta_{rs} - \beta_{rm} = a_r(a_s - a_m), \quad \gamma_{rs} - \gamma_{rm} = a_m - a_s, \end{cases}$$

delle quali si farà uso più avanti.

Questi valori di α_{rs}, β_{rs}, γ_{rs} dimostrano essere $\sum \varepsilon = 0$, estendendosi il segno sommatorio alle dieci forme ε. L'analoga somma per le potenze seconda, terza ... delle ε conduce ad altrettanti covarianti della forma di sesto ordine:

$$f(z_1, z_2) = z_1(z_2 - a_0 z_1)(z_2 - a_1 z_1) \dots (z_2 - a_4 z_1) = \varphi(z_1, z_2)\psi(z_1, z_2).$$

Così, per esempio, indicando con k il covariante biquadratico

$$k = \tfrac{1}{2}(ff)_4,$$

si ha:

$$\sum \varepsilon^2 = 4.5.9\, k(z_1, z_2);$$

ed indicando con p il covariante di sesto ordine $p = (fk)_2$, si ottiene:

$$\sum \varepsilon^3 = 4.5.3^3 p(z_1, z_2),$$

ed analogamente per potenze superiori. La stessa proprietà sussiste rispetto agli invarianti; ad esempio indicando con A l'invariante quadratico $\frac{1}{2}(ff)_6$ della forma $f(z_1, z_2)$, si ha:

$$\sum (\alpha_{rs}\gamma_{rs} - \beta_{rs}^2) = 4.9\, A.$$

Evidentemente tra quattro funzioni quadratiche ε deve sussistere una relazione lineare. Rappresentando con c, c_0, c_2, ... c_{34} i valori delle corrispondenti theta pari per $u_1 = u_2 = 0$, quelle relazioni si deducono dalle cinque seguenti:

$$\begin{aligned} c_{03}^4 \varepsilon_{03} &= \quad c^4 \varepsilon - c_0^4 \varepsilon_0 - c_{01}^4 \varepsilon_{01}, \\ c_{23}^4 \varepsilon_{23} &= \quad c_0^4 \varepsilon_0 + c_{01}^4 \varepsilon_{01} - c_{34}^4 \varepsilon_{34}, \\ c_{12}^4 \varepsilon_{12} &= - c_{01}^4 \varepsilon_{01} + c_{34}^4 \varepsilon_{34} + c_4^4 \varepsilon_4, \\ c_{14}^4 \varepsilon_{14} &= - c_{34}^4 \varepsilon_{34} - c_4^4 \varepsilon_4 + c^4 \varepsilon, \\ c_2^4 \varepsilon_2 &= - c_4^4 \varepsilon_4 + c^4 \varepsilon - c_0^4 \varepsilon_0, \end{aligned}$$

le quali sono disposte per modo che dànno i valori di cinque forme ε espresse linear-

mente per le altre cinque. Si potranno quindi esprimere i valori dei rapporti $\frac{c_0^4}{c^4}$, $\frac{c_2^4}{c^4}$, ... in funzione dei coefficienti delle forme quadratiche ε.

2. Se nelle equazioni (14) della precedente comunicazione supponesi $r = 1$, $s = 3$, o reciprocamente, e si pongono nelle medesime $u_1 = u_2 = 0$; essendo $\sigma_1(0, 0) = \sigma_3(0, 0) = 0$ e $\sigma(0, 0) = 1$, si ottengono le

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u_1^2}\right)_0 = \alpha_{13}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_0 = \beta_{13}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u_2^2}\right)_0 = \gamma_{13},$$

ed analogamente per le altre nove funzioni sigma pari, per mezzo delle equazioni (16), (17). Ciò è noto per lo sviluppo in serie di queste funzioni sigma *). Ma dalle stesse equazioni si deducono altresì per le funzioni dispari σ_1, σ_3, σ_{13} le seguenti:

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1^2} &= \alpha'_{13} - \frac{1}{p_1^2}[a_1^2 p_{13}^2 + g(a_1)p_3^2 - a_3^2 g(a_1)], \\ \frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1 \partial u_2} &= \beta_{13} + \frac{1}{p_1^2}[a_1 p_{13}^2 - a_3 g(a_1)], \\ \frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_2^2} &= \gamma_{13} - \frac{1}{p_1^2}[p_{13}^2 - g(a_1)], \end{aligned}\right.$$

posto $g(a_1) = (a_1 - a_0)(a_1 - a_2)(a_1 - a_4)$. Permutando i numeri 1, 3, si avranno le analoghe equazioni per la funzione σ_3.

Così, ponendo nelle (17) $r = 1$, $s = 3$, $m = 0$, $\mu = 2$, $\lambda = 4$, si ottiene la

$$\frac{\partial^2 \log \sigma_{13}}{\partial u_2^2} = \gamma_{02} + \frac{1}{p_{13}^2}\left[(01)p_{24}^2 + (23)p_{14}^2 - \frac{g(a_1)g(a_3)}{(14)(30)}\right],$$

essendo $(01) = a_0 - a_1$, ...; e le altre due simili. In queste equazioni si sono sostituite le funzioni iperellittiche $p(u_1, u_2)$ ai rapporti delle corrispondenti sigma per la semplificazione delle formole.

Si indichino ora con ω_{11}, ω_{21}; ω_{12}, ω_{22}; ω_{13}, ω_{23}; ω_{14}, ω_{24} i noti periodi, e si pongano, ad esempio, nelle equazioni (3) $u_1 = \omega_{11}$, $u_2 = \omega_{21}$; osservando essere

$$p_1^2(\omega_{11}) = (12)(13), \qquad p_3^2(\omega_{11}) = 0, \qquad p_{13}^2(\omega_{11}) = (12)(30)(34),$$

---

*) V. KLEIN, *Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen* [Mathematische Annalen, t. XXVII (1886), pp. 431-464] e la mia Nota: *Sulla espressione per serie delle funzioni iperellittiche a due variabili* [CXLV: t. IV, pp. 1-13].

si avrà:

$$\left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{11}} = \alpha_{13} - a_1^2 \frac{(30)(34)}{(13)} + a_3^2 \frac{(10)(14)}{(13)}$$

$$= \alpha_{13} + a_1 a_3 (a_0 + a_4) - a_0 a_4 (a_1 + a_3),$$

e quindi per le relazioni (1):

$$\left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{11}} = \alpha_{04}, \tag{4}$$

ed analogamente:

$$\left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_{\omega_{11}} = \beta_{04}, \quad \left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_2^2}\right)_{\omega_{11}} = \gamma_{04}.$$

Così, ponendo nelle stesse equazioni $u_1 = \omega_{11} + \omega_{12}$, $u_2 = \omega_{21} + \omega_{22}$, siccome:

$$p_1^2(\omega_{11} + \omega_{12}) = (12)(14), \quad p_3^2(\omega_{11} + \omega_{12}) = (32)(34), \quad p_{13}^2(\omega_{11} + \omega_{12}) = 0,$$

si ha:

$$\left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{11}+\omega_{12}} = \alpha_{13} + (01)[(32)(34) - a_3^2],$$

o per le relazioni (2):

$$\left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{11}+\omega_{12}} = \alpha_{03}.$$

Nello stesso modo si ottengono le

$$\left(\frac{\partial^2 \log \sigma_3}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{12}} = \alpha_{02}, \quad \left(\frac{\partial^2 \log \sigma_3}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{11}+\omega_{12}} = \alpha_{01},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \log \sigma_{13}}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{11}} = \alpha_{12}, \quad \left(\frac{\partial^2 \log \sigma_{13}}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{12}} = \alpha_{34},$$

e così per le altre funzioni sigma dispari.

3. Le quantità indicate con m_{rs} nella precedente comunicazione possono esprimersi colle α_{rs}, β_{rs}, γ_{rs} come segue:

$$m_{rs} = \alpha_{rs} - \tfrac{2}{5} A_1 \beta_{rs} + \tfrac{1}{10} A_2 \gamma_{rs};$$

ma pei valori di β_{rs}, γ_{rs} si hanno le

$$-\tfrac{2}{5} A_1 = \gamma_{rs} + a_r + a_s, \quad \tfrac{1}{10} A_2 = a_r a_s - \beta_{rs};$$

quindi:

$$m_{rs} = \alpha_{rs} + (a_r + a_s)\beta_{rs} + a_r a_s \gamma_{rs}.$$

Ma si ha altresì:

$$-\frac{2}{5}A_1 = \gamma_{\lambda\mu} + a_\lambda + a_\mu, \qquad \frac{1}{10}A_2 = a_\lambda a_\mu - \beta_{\lambda\mu},$$

e perciò anche:

$$m_{rs} = \alpha_{rs} + (a_\lambda + a_\mu)\beta_{rs} + a_\lambda a_\mu \gamma_{rs} + \beta_{rs}\gamma_{\lambda\mu} - \beta_{\lambda\mu}\gamma_{rs};$$

ora dimostrasi facilmente, colla calcolazione diretta, che, supposto λ, μ differenti da r, s, sussiste la

$$\beta_{rs}\gamma_{\lambda\mu} - \beta_{\lambda\mu}\gamma_{rs} = m_{rs} - m_{\lambda\mu},$$

si avrà così:

$$m_{\lambda\mu} = \alpha_{rs} + (a_\lambda + a_\mu)\beta_{rs} + a_\lambda a_\mu \gamma_{rs},$$

nella quale λ, μ possono essere eguali ad r, s oppure l'una e l'altra disuguali.

Ciò posto, si osservi che dalla equazione (4) e dalla seconda delle (10) della comunicazione precedente, deducesi la

$$\frac{\partial^2 \log \sigma_m}{\partial u_1^2} + (a_r + a_s)\frac{\partial^2 \log \sigma_m}{\partial u_1 \partial u_2} + a_r a_s \frac{\partial^2 \log \sigma_m}{\partial u_2^2} = m_{rs} - (mr)(ms)\frac{p_{\lambda\mu}^2}{p_m^2},$$

ed in questa, come si è veduto, le r, s, m, λ, μ sono differenti fra loro. Suppongasi in essa $m = 1$, siccome per quanto si è dimostrato sopra sussiste, ad esempio, la

$$m_{04} = \alpha_{04} + (a_0 + a_4)\beta_{04} + a_0 a_4 \gamma_{04},$$

si avrà:

$$\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1^2} - \left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1^2}\right)_{\omega_{11}} + (a_0 + a_4)\left[\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1 \partial u_2} - \left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_{\omega_{11}}\right]$$

$$+ a_0 a_4 \left[\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \log \sigma_1}{\partial u_2^2}\right)_{\omega_{11}}\right] = -(a_1 - a_0)(a_1 - a_4)\frac{p_{23}^2}{p_1^2},$$

cioè il rapporto $\frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_1^2}$ espresso in funzione delle derivate parziali seconde di $\log \sigma_1$ e dei loro valori per $u_1 = \omega_{11}$, $u_2 = \omega_{21}$. Così per le altre funzioni sigma pari.

17 aprile 1887.

CXLIX.

OSSERVAZIONI SU DI UNA COMUNICAZIONE DEL DR. H. MASCHKE RELATIVA ALLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI SESTO GRADO.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume IV (1888, 1° sem.), pp. 183-184.

La singolare importanza della Memoria pubblicata dal dott. MASCHKE nel volume XXX dei « Mathematische Annalen » *) aveva attirato tutta la mia attenzione e già da oltre un mese, in una lettera diretta al nostro Socio straniero prof. KLEIN, io dimostrava come una equazione qualunque del sesto grado poteva trasformarsi nella equazione (14) della Memoria indicata. Ora in una comunicazione, che io presento all'Accademia **), il dott. MASCHKE giunge per via affatto differente allo stesso risultato, ed io sono a lui assai grato di essersi diretto a me per renderlo pubblico.

Ecco ora in qual modo io vi giungeva. La equazione (14) della Memoria del dott. MASCHKE è la seguente:

$$y^6 - 6F_8y^4 + 4F_{12}y^3 + 9F_8^2y^2 - 12F_{20}y + 4F_{24} = 0,$$

ossia la

$$(y^3 - 3F_8y + 2F_{12})^2 + 12(F_8F_{12} - F_{20})y - 4(F_{12}^2 - F_{24}) = 0.$$

Posta sotto questa ultima forma, pei valori di A, B^*, C^*, Δ determinati dal dottor BOLZA ***), la equazione stessa si trasforma nella

---

*) MASCHKE, *Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der* BORCHARDT'*schen Moduln* [Mathematische Annalen, t. XXX (1887), pp. 496-515].

**) MASCHKE, *La risoluzione della equazione di sesto grado (Estratto di una lettera al socio* BRIOSCHI) [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. IV, t. IV (1888, 1° sem.), pp. 181-182].

***) BOLZA, *Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen* [Mathematische Annalen, t. XXX (1887), pp. 478-495].

$$(\xi^3 - 5.3^3 B^* \xi - 10.3^3 C^*)^2 + \frac{\Delta}{4^3}(\xi - 5.2^7 A) = 0,$$

nella quale $\xi = \frac{1}{3}\rho^2 y$.

Facciasi ora

$$\xi = 5.2^7 A - t^2,$$

e si giungerà alla

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t^6 - 3.5.2^7 A t^4 + 3.5(5.4^7 A^2 - 9B^*)t^2 \\ + \frac{1}{8}\Delta^{\frac{1}{2}} t - 10(5^2.4^{10}A^3 - 5.3^3.4^3 A B^* - 3^3 C^*) = 0. \end{array} \right.$$

Sia $u(x_1, x_2) = 0$ una equazione qualsivoglia del 6° grado, e $k = \frac{1}{2}(uu)_4$ un covariante di quarto ordine della forma u. Per un teorema da me dimostrato alcuni anni sono negli « Annali di Matematica » *), se si pone:

$$t u_1 + x_2 k = 0, \qquad t u_2 - x_1 k = 0,$$

essendo $u_1 = \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $u_2 = \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial x_2}$, e si elimina il rapporto $x_1 : x_2$ da quelle due equazioni, si ottiene una trasformata della equazione $u = 0$, cioè la

$$\delta t^6 + u_{12} t^4 + u_{14} t^2 + u_{15} t + u_{16} = 0,$$

nella quale δ è il discriminante di u ed $u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}$ invarianti della stessa forma **).

Ora, ponendo a confronto quest'ultima equazione colla superiore (1), si ottengono per A, B^*, C^*, Δ i seguenti valori:

$$A = -\frac{1}{3.5.2^7}\frac{u_{12}}{\delta}, \qquad B^* = \frac{1}{5.3^4\delta^2}(u_{12}^2 - 3\delta u_{14}),$$

$$C^* = \frac{1}{2.5.3^6\delta^3}(2u_{12}^3 - 9\delta u_{12}u_{14} + 27\delta^2 u_{16}), \qquad \Delta^{\frac{1}{2}} = 8\frac{u_{15}}{\delta}.$$

Questi valori degli invarianti della forma binaria del sesto ordine degli integrali normali iperellittici sembrano a me degni di osservazione; mi riservo perciò di ritornare sui medesimi, e sulla trasformazione della equazione di sesto grado che ad essi conduce, appena possa ottenere la calcolazione dei quattro invarianti $u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}$.

4 marzo 1888.

---

*) [LXXXV: t. II, pp. 281-294].

**) Non avendo eseguita la calcolazione di questi invarianti, ho pregato alcune settimane sono il prof. MAISANO dell'Università di Messina di volerlo fare. Egli ha aderito chiedendo qualche tempo per altre sue occupazioni, e fu questa la ragione per la quale non pubblicai prima d'ora il risultato superiore.

CL.

LA FORMA NORMALE DELLE EQUAZIONI DEL SESTO GRADO.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume IV (1888, 1° sem.), pp. 301-305, 485-488.

NOTA I.

1. Denomino forma *normale* di una equazione del sesto grado quella che ottiensi da una equazione qualunque del sesto grado mediante la trasformazione indicata in una mia recente comunicazione all'Accademia *).

Rappresentando con $u(x_1, x_2) = 0$ la equazione del 6° grado, e con $k = \frac{1}{2}(uu)_4$ il covariante biquadratico del secondo grado della forma $u(x_1, x_2)$, eliminando il rapporto $x_1 : x_2$ dalle due quintiche

(1) $$\varphi = tu_1 + x_2 k = 0, \qquad \psi = tu_2 - x_1 k = 0,$$

si ottiene la

(2) $$\delta t^6 + u_{12} t^4 + u_{14} t^2 + u_{15} t + u_{16} = 0,$$

nella quale δ è il discriminante della forma $u(x_1, x_2)$ ed u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16} sono invarianti della forma stessa dei gradi 12, 14, 15, 16. La equazione (2) è la forma *normale* delle equazioni del sesto grado.

Questa forma normale non è quindi che la risultante delle due equazioni di quinto grado $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ed un metodo diretto per giungere ad essa fu già fatto conoscere dal prof. GORDAN vari anni sono **). Però, nel caso attuale, per la determi-

*) [CXLIX: t. IV, pp. 41-42].

**) GORDAN, *Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen* [Mathematische Annalen, t. III (1871), pp. 355-414 (385)].

nazione dei valori di u_{12}, u_{14}, ..., conviene ricorrere ad un altro metodo indiretto che indicheremo più avanti, limitandoci a fare uso di alcuni risultati del metodo dovuto al prof. Gordan per altro scopo.

Il prof. Gordan introduce dapprima tre covarianti simultanei delle forme φ, ψ, da lui denominati ρ, σ, τ; ossia

$$\rho = 5(\varphi\psi), \qquad \sigma = \tfrac{25}{12}(\varphi\psi)_3, \qquad \tau = \tfrac{5}{3}(\varphi\psi)_5.$$

Posto, per la forma del sesto ordine $u(x_1, x_2)$:

$$h = \tfrac{1}{2}(uu)_2, \qquad g = (uk), \qquad p = \tfrac{1}{2}(kk)_2,$$

i primi due sono covarianti dell'ottavo ordine, ed il terzo di quarto ordine, della forma u; ed

$$L = \tfrac{1}{2}(uu)_6, \qquad M = \tfrac{1}{2}(kk)_4$$

sono i due invarianti di secondo e quarto grado. Si hanno, nel caso attuale, i seguenti valori di ρ, σ, τ:

$$\rho = 5ht^2 - 4gt + k^2,$$

$$\sigma = \tfrac{1}{12}(25kt^2 + 24p), \qquad \tau = \tfrac{1}{3}(5Lt^2 + 6M),$$

e dalle due equazioni $\varphi = 0$, $\psi = 0$ si deducono facilmente le cinque che seguono:

$$\rho_{1111} + \tfrac{12}{7}\sigma_{11}x_2^2 + \tfrac{1}{5}\tau x_2^4 = 0,$$

$$\rho_{1112} - \tfrac{6}{7}(\sigma_{11}x_1x_2 - \sigma_{12}x_2^2) - \tfrac{1}{5}\tau x_2^3 x_1 = 0,$$

$$\rho_{1122} + \tfrac{2}{7}(\sigma_{11}x_1^2 - 4\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{22}x_2^2) + \tfrac{1}{5}\tau x_2^2 x_1^2 = 0,$$

$$\rho_{1222} - \tfrac{6}{7}(\sigma_{22}x_1x_2 - \sigma_{12}x_1^2) - \tfrac{1}{5}\tau x_2 x_1^3 = 0,$$

$$\rho_{2222} + \tfrac{12}{7}\sigma_{22}x_1^2 + \tfrac{1}{5}\tau x_1^4 = 0,$$

nelle quali;

$$\rho_{1111} = \frac{1}{5.6.7.8}\frac{\partial^4\rho}{\partial x_1^4}, \qquad \sigma_{11} = \frac{1}{3.4}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2}, \qquad \text{ecc.}$$

Indicando con

$$a_{r1}x_1^4 + 4a_{r2}x_1^3x_2 + 6a_{r3}x_1^2x_2^2 + 4a_{r4}x_1x_2^3 + a_{r5}x_2^4 = 0 \quad (r = 1, 2, \dots 5)$$

quelle cinque equazioni, si avrà dapprima che il primo membro della equazione (2) è dato dal determinante

$$V = \sum(\pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}),$$

e sarà

$$x_1 : x_2 = \frac{\partial V}{\partial a_{55}} : \frac{\partial V}{\partial a_{54}},$$

cioè, come è noto, si dedurranno i valori delle radici della equazione $u(x_1, x_2) = 0$ da quelli delle radici della equazione trasformata (2) senza ricorrere a risoluzioni di altre equazioni ausiliari.

2. Passiamo ora alla determinazione dei valori di $u_{12}, u_{14}, \ldots$. Una forma $u(x_1, x_2)$ del sesto ordine possiede, oltre gli invarianti L, M, tre invarianti dei gradi 6°, 10°, 15° che indicheremo con N, P, R.

N, come è noto, è l'invariante cubico di k. Per fissare i valori di P, R, sieno l, m, n i tre covarianti quadratici di u:

$$l = (uk)_4, \qquad m = (lk)_2, \qquad n = (mk)_2;$$

porremo:

$$P = \tfrac{1}{2}(mm)_2, \qquad R = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} \end{vmatrix}.$$

Sieno $x_1, x_2, \ldots x_6$ le radici della equazione $u(x, 1) = 0$, e si indichino con a, b, c, d, e le espressioni

$$a = \frac{1}{6} u'(x_r), \qquad b = \frac{1}{5.6} u''(x_r), \qquad \ldots \qquad e = \frac{1}{2.3\ldots6} u^{\text{v}}(x_r),$$

essendo x_r una qualsivoglia fra quelle radici. Ora per una nota proprietà dei covarianti si ha *):

$$k(x_r) = 3b^2 - 4ac;$$

e quindi, per le (1), si avrà:

$$t_r = \frac{4ac - 3b^2}{a}.$$

I valori degli invarianti L, M, N, P, R si possono pure esprimere in funzione delle a, b, c, d, e e lo stesso avrà pur luogo per δ, $u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}$; salvo che le ultime espressioni conterranno un certo numero di coefficienti indeterminati. Sostituendo

*) Vedi la mia Nota: *Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten* [Mathematische Annalen, t. XXIX (1887), pp. 327-330], e la Memoria del dott. Hilbert: *Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete* [Mathematische Annalen, t. XXX, (1887), pp. 15-29].

il valore superiore di t_r e queste espressioni nella (2), si otterrà una equazione identica la quale condurrà alla determinazione di quei coefficienti. Evidentemente, per l'identità della equazione, si potranno anche supporre nulle una o più delle quantità $a, b, \ldots e$, purchè non si annulli alcuno degli invarianti $L, M, \ldots R$. Per esempio, supponendo $b = c = 0$, si ha $t_r = 0$ e quindi identicamente $u_{16} = 0$. Ma in questa ipotesi:

$$L = -6ae, \qquad M = 3a^2 d, \qquad N = -\tfrac{27}{4} a^2 d^4,$$

$$P = -a^4(a^2 + 18ad^2 e + 81 d^4 e^2 + 5.81 d^5),$$

e per questi valori vedesi tosto che u_{16} dovrà esprimersi come segue:

$$u_{16} = \rho_0 L^2 N^2 + \rho_1 L^2 M^3 + \rho_2 L M^2 N + \rho_3 M N^2 + \rho_4 M^4 + \rho_5 NP,$$

essendo $\rho_0, \rho_1, \ldots$ coefficienti indeterminati. Sostituendo per L, M, N, P i valori superiori ed eguagliando a zero, si hanno fra quei coefficienti le relazioni:

$$3\rho_0 + \rho_5 = 0, \quad \rho_1 = 0, \quad 3\rho_2 + \rho_5 = 0, \quad \rho_3 + 20\rho_5 = 0, \quad 3\rho_4 + \tfrac{1}{4}\rho_5 = 0;$$

e posto quindi $\rho_5 = -12\nu$, si avrà:

$$u_{16} = \nu[(M^2 + 2LN)^2 + 12N(20MN - P)],$$

essendo ν un coefficiente numerico ancora indeterminato. Due altri coefficienti della equazione (2) sono noti, il δ discriminante della forma $u(x_1, x_2)$ ed u_{15} non esistendo altro invariante di 15° grado che R. Si hanno così le

$$\delta = \lambda[32(5^4 L^2 N + 5^3 L^3 M - 4L^5) - 5^5(8LM^2 + 48MN + 3P)],$$

$$u_{15} = \mu R,$$

nelle quali λ, μ sono coefficienti numerici a determinarsi. Rimangono così a trovarsi i valori di u_{12}, u_{14} e dei coefficienti λ, μ, ν.

L'applicazione del metodo sopra indicato darà dapprima che

$$\text{posto} \qquad \lambda = -\frac{1}{3^2 \cdot 4^3}, \qquad \text{sono} \qquad \mu = 6, \qquad \nu = 12;$$

e si avranno pei valori di u_{12}, u_{14} le espressioni seguenti:

$$u_{12} = \frac{4}{3} L^4 M - 4.5 L^3 N - \frac{7.5^2}{3} L^2 M^2 - 2.5^3 LMN + \frac{5^2}{12} M^3 - \frac{3^2 . 5^4}{4} N^2 + \frac{5^3}{4} LP,$$

$$u_{14} = -2.4^3 L^2 MN - 2.5.13 LM^3 - 3^3.4.5 LN^2 - 2.3.5^2.11 M^2 N + 3(L^2 + 2.5^2 M)P.$$

Queste espressioni si possono semplificare, introducendo in luogo dell'invariante P del decimo ordine il discriminante δ, e, posto $L=\alpha$, sostituendo agli invarianti M, N gli invarianti β, γ legati ai primi dalle due relazioni:

$$5^2 M = \tfrac{4}{3}(\alpha^2 - \beta), \qquad 5^3 N = \tfrac{4}{27}(2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma),$$

cioè gli invarianti β, γ, che si annullano con δ, se la equazione $u(x, 1) = 0$ ammette una radice tripla.

Dal valore superiore di δ si avrà così:

$$5^5 P = 3.4^3\delta + \frac{2.4^3}{3^4}(9\alpha^5 - 20\alpha^3\beta + 3\alpha^2\gamma - 21\alpha\beta^2 + 2\beta\gamma),$$

e sostituendo questo valore di P e quelli di M, N nelle espressioni trovate sopra per u_{12}, u_{14}, u_{16}, si otterranno le

$$5^2 u_{12} = 3.4^2\alpha\delta + \frac{4}{3^4}U, \qquad 5^5 u_{14} = 3.4^3(11\alpha^2 - 8\beta)\delta + \frac{4^3}{27}V,$$

$$5^8 u_{16} = -4^6(2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma)\delta - \frac{4^4}{27}W,$$

essendo:

$$U = -(15\alpha\beta - \gamma)^2 - 20\beta^3,$$

$$V = \alpha U + 2.3^2\beta^2(10\alpha\beta - \gamma),$$

$$W = (\alpha^2 - 16\beta)U - 4.3^4\beta^2(\beta^2 + 10\alpha^2\beta - \alpha\gamma).$$

È noto che il quadrato di R si esprime in funzione razionale, intera, di L, M, N, P; e si ha:

$$R^2 = 9(20MN - P)E^2 - 6(M^2 + 2LN)EF - 12NF^2,$$

posto

$$\tfrac{9}{2}E = 3(P + 4MN) - 2L(M^2 + 2LN),$$

$$\tfrac{9}{2}F = -3L(20MN - P) - 32M^3 - 216N^2.$$

Ora:

$$5^4(M^2 + 2LN) = \tfrac{8}{27}(16\alpha^4 - 27\alpha^2\beta + 6\beta^2 + 5\alpha\gamma) = \tfrac{8}{27}H,$$

$$5^5(20MN - P) = -3.4^3\delta - \frac{4^3}{81}(8\alpha^5 - 15\alpha^3\beta + \alpha^2\gamma - 57\alpha\beta^2 + 9\beta\gamma)$$

$$= -3.4^3\delta - \frac{4^3}{81}K,$$

inoltre:

$$\frac{9}{2}\cdot 5^5 E = 3^2.4^3\delta - \frac{4^2}{9}(15\alpha^3\beta - \alpha^2\gamma + 62\alpha\beta^2 - 4\beta\gamma)$$
$$= 3^2.4^3\delta - \frac{4^2}{9}S,$$
$$\frac{9}{2}\cdot 5^6 F = 3^2.4^3.5\alpha\delta + \frac{4^3}{27}(45\alpha^4\beta - 3\alpha^3\gamma - 19.21\alpha^2\beta^2 + 57\alpha\beta\gamma + 32\beta^3 - 2\gamma^2)$$
$$= 3^2.4^3.5\alpha\delta + \frac{4^3}{27}T,$$

e sostituendo si otterrà R^2 espresso in funzione di α, β, γ, δ; ossia:

$$\frac{5^{15}}{3^3.4^{10}}R^2 = -\delta^3 + \frac{1}{4.3^5}[6S - 4K - 5\alpha H - 25\alpha^2(2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma)]\delta^2$$
$$-\frac{1}{4^2.3^{10}}[9S^2 + 4HT - 24KS - 15\alpha HS + 40\alpha T(2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma)]\delta$$
$$+\frac{1}{4^2.3^{15}}[3HST - 9KS^2 - 4T^2(2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma)].$$

Sono così determinati tutti gli elementi che compongono la trasformata della equazione del sesto grado.

8 aprile 1888.

NOTA II.

1. Nella precedente comunicazione ho determinato il valore dei coefficienti della equazione che si ottiene trasformando una equazione qualsivoglia del sesto grado $u(x) = 0$, di cui le radici sono $x_0, x_1, \ldots x_5$, per mezzo della relazione

$$t_r = \frac{4ac - 3b^2}{a},$$

essendo

$$a = \frac{1}{6}u'(x_r), \qquad b = \frac{1}{5.6}u''(x_r), \qquad c = \frac{1}{4.5.6}u'''(x_r).$$

In questa Nota prenderemo ad esaminare i valori delle radici $t_0, t_1, \ldots t_5$ della trasformata normale. Posto

$$u(x) = (x - x_0)\varphi(x),$$

risultando

$$u'(x_0) = \varphi(x_0), \quad u''(x_0) = 2\varphi'(x_0), \quad u'''(x_0) = 3\varphi''(x_0),$$

si ha:

$$2.5^2 \varphi(x_0) \cdot t_0 = 5\varphi(x_0)\varphi''(x_0) - 4\varphi'^2(x_0);$$

ma:

$$\frac{\varphi'(x_0)}{\varphi(x_0)} = \sum_1^5{}_r \alpha_r, \qquad \frac{\varphi(x_0)\varphi''(x_0) - \varphi'^2(x_0)}{\varphi^2(x_0)} = -\sum_1^5{}_r \alpha_r^2,$$

essendo

$$\alpha_r = \frac{1}{x_0 - x_r};$$

si otterrà quindi:

$$5^2 t_0 = \varphi(x_0)\left[\sum \alpha_r \alpha_s - 2\sum \alpha_r^2\right],$$

nella quale gli indici r, s sono differenti fra loro. Indicando con (rs) il binomio $x_r - x_s$, ed osservando essere

$$\alpha_r - \alpha_s = (rs)\alpha_r \alpha_s,$$

il valore superiore di t_0 si trasforma nel seguente:

$$5^2 t_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5,$$

essendo

$$\psi_1 = \frac{1}{(10)}[(12)(15)(03)(04) + (13)(14)(02)(05)],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{(20)}[(21)(23)(04)(05) + (24)(25)(01)(03)],$$

$$\psi_3 = \frac{1}{(30)}[(32)(34)(05)(01) + (35)(31)(04)(02)],$$

$$\psi_4 = \frac{1}{(40)}[(43)(45)(01)(02) + (41)(42)(03)(05)],$$

$$\psi_5 = \frac{1}{(50)}[(51)(54)(02)(03) + (52)(53)(01)(04)],$$

ossia, posto

$$\psi_1 = (12345),$$

saranno:

$$\psi_2 = (21543), \quad \psi_3 = (32154), \quad \psi_4 = (43215), \quad \psi_5 = (54321).$$

Si introducano ora, come nella teoria delle funzioni iperellittiche, le dieci espres-

sioni *):

$$\gamma_5^4 = (02)(24)(40)(13)(35)(51), \qquad \gamma_{23}^4 = (03)(34)(40)(12)(25)(51),$$

$$\gamma_{01}^4 = (03)(35)(50)(12)(24)(41), \qquad \gamma_2^4 = (04)(45)(50)(12)(23)(31),$$

$$\gamma_{03}^4 = (01)(15)(50)(23)(34)(42), \qquad \gamma_{14}^4 = (01)(12)(20)(34)(45)(53),$$

$$\gamma_0^4 = (01)(13)(30)(24)(45)(52), \qquad \gamma_{34}^4 = (02)(23)(30)(14)(45)(51),$$

$$\gamma_{12}^4 = (01)(14)(40)(23)(35)(52), \qquad \gamma_4^4 = (02)(25)(50)(13)(34)(41),$$

e notisi come per le medesime le funzioni superiori $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_5$ si esprimono nel modo che segue:

$$\psi_1 = -\frac{\gamma_{23}^4 + \gamma_4^4}{(01)(25)(34)}, \qquad \psi_2 = \frac{\gamma_2^4 - \gamma_0^4}{(02)(13)(45)}, \qquad \psi_3 = \frac{\gamma_{03}^4 + \gamma_5^4}{(03)(15)(24)},$$

$$\psi_4 = \frac{\gamma_{14}^4 - \gamma_{01}^4}{(04)(12)(35)}, \qquad \psi_5 = -\frac{\gamma_{34}^4 + \gamma_{12}^4}{(05)(14)(23)}.$$

Ma, posto

$$\delta^{\frac{1}{2}} = (01)(02)(03)(04)(05)(12)(13)(14)(15)(23)(24)(25)(34)(35)(45),$$

ossia

$$\delta^{\frac{1}{2}} = \prod \gamma;$$

si ha che ciascuna delle cinque espressioni seguenti

$$\gamma_5^2\,\gamma_2^2\,\gamma_{01}^2\,\gamma_{34}^2\,(01)(25)(34),$$

$$\gamma_{01}^2\,\gamma_{03}^2\,\gamma_{12}^2\,\gamma_{23}^2\,(02)(13)(45),$$

$$\gamma_2^2\,\gamma_4^2\,\gamma_{14}^2\,\gamma_{12}^2\,(03)(15)(24),$$

$$\gamma_4^2\,\gamma_0^2\,\gamma_{34}^2\,\gamma_{03}^2\,(04)(12)(35),$$

$$\gamma_0^2\,\gamma_5^2\,\gamma_{23}^2\,\gamma_{14}^2\,(05)(14)(23),$$

è eguale a $\prod \gamma$.

---

*) STAUDE, *Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlicher* [Mathematische Annalen, t. XXIV (1884), pp. 281-312 (286)].

I valori di ψ_1, ψ_2, ... si possono quindi esprimere in funzione delle dieci quantità γ, e si hanno le

$$\prod \gamma \cdot \psi_1 = -\gamma_5^2 \gamma_2^2 \gamma_{01}^2 \gamma_{34}^2 (\gamma_{23}^4 + \gamma_4^4),$$
$$\prod \gamma \cdot \psi_2 = \gamma_{01}^2 \gamma_{03}^2 \gamma_{12}^2 \gamma_{23}^2 (\gamma_2^4 - \gamma_0^4),$$
$$\prod \gamma \cdot \psi_3 = \gamma_2^2 \gamma_4^2 \gamma_{14}^2 \gamma_{12}^2 (\gamma_{03}^4 + \gamma_5^4),$$
$$\prod \gamma \cdot \psi_4 = \gamma_4^2 \gamma_0^2 \gamma_{34}^2 \gamma_{03}^2 (\gamma_{14}^4 - \gamma_{01}^4),$$
$$\prod \gamma \cdot \psi_5 = -\gamma_0^2 \gamma_5^2 \gamma_{23}^2 \gamma_{14}^2 (\gamma_{34}^4 + \gamma_{12}^4);$$

ma dalle note relazioni fra i quadrati delle dieci funzioni γ, si ottengono le

$$\gamma_{01}^2 \gamma_{03}^2 \gamma_{12}^2 \gamma_{23}^2 = \gamma_{01}^4 (\gamma_{34}^4 + \gamma_{03}^4) - \gamma_5^2 \gamma_2^2 \gamma_{01}^2 \gamma_{34}^2,$$
$$\gamma_2^2 \gamma_4^2 \gamma_{14}^2 \gamma_{12}^2 = -\gamma_2^4 (\gamma_{01}^4 + \gamma_{12}^4) + \gamma_5^2 \gamma_2^2 \gamma_{01}^2 \gamma_{34}^2,$$
$$\gamma_4^2 \gamma_0^2 \gamma_{34}^2 \gamma_{03}^2 = \gamma_{34}^4 (\gamma_5^4 - \gamma_0^4) - \gamma_5^2 \gamma_2^2 \gamma_{01}^2 \gamma_{34}^2,$$
$$\gamma_0^2 \gamma_5^2 \gamma_{23}^2 \gamma_{14}^2 = \gamma_5^4 (\gamma_{14}^4 - \gamma_2^4) + \gamma_5^2 \gamma_2^2 \gamma_{01}^2 \gamma_{34}^2;$$

e quindi sommando si giunge al valore di t_0:

$$\begin{aligned} 5^2 \prod \gamma \cdot t_0 = & -\gamma_5^4 (\gamma_{12}^4 \gamma_{14}^4 + \gamma_{01}^4 \gamma_{34}^4) + \gamma_2^4 (\gamma_{01}^4 \gamma_{34}^4 - \gamma_{03}^4 \gamma_{12}^4) \\ & - \gamma_{01}^4 (\gamma_5^4 \gamma_2^4 + \gamma_0^4 \gamma_{03}^4) + \gamma_{34}^4 (\gamma_5^4 \gamma_2^4 - \gamma_0^4 \gamma_{14}^4), \end{aligned}$$

al quale per le suindicate relazioni ponno darsi forme differenti. I valori di t_1, t_2, ... si deducono da quello di t_0 per mezzo di sostituzioni circolari e si hanno:

$$\begin{aligned} 5^2 \prod \gamma \cdot t_1 = & \gamma_5^4 (\gamma_2^4 \gamma_{23}^4 + \gamma_4^4 \gamma_{12}^4) - \gamma_{03}^4 (\gamma_4^4 \gamma_{12}^4 - \gamma_{14}^4 \gamma_{23}^4) \\ & + \gamma_{12}^4 (\gamma_5^4 \gamma_{03}^4 + \gamma_{01}^4 \gamma_{14}^4) - \gamma_4^4 (\gamma_5^4 \gamma_{03}^4 - \gamma_{01}^4 \gamma_2^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^2 \prod \gamma \cdot t_2 = & -\gamma_5^4 (\gamma_{03}^4 \gamma_{34}^4 + \gamma_0^4 \gamma_{23}^4) + \gamma_{14}^4 (\gamma_0^4 \gamma_{23}^4 - \gamma_2^4 \gamma_{34}^4) \\ & - \gamma_{23}^4 (\gamma_5^4 \gamma_{14}^4 + \gamma_{12}^4 \gamma_2^4) + \gamma_0^4 (\gamma_5^4 \gamma_{14}^4 - \gamma_{12}^4 \gamma_{03}^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^2 \prod \gamma \cdot t_3 = & \gamma_5^4 (\gamma_4^4 \gamma_{14}^4 + \gamma_{01}^4 \gamma_{34}^4) - \gamma_2^4 (\gamma_{01}^4 \gamma_{34}^4 - \gamma_4^4 \gamma_{03}^4) \\ & + \gamma_{34}^4 (\gamma_5^4 \gamma_2^4 + \gamma_{23}^4 \gamma_{03}^4) - \gamma_{01}^4 (\gamma_5^4 \gamma_2^4 - \gamma_{23}^4 \gamma_{14}^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^2 \prod \gamma \cdot t_4 = & -\gamma_5^4 (\gamma_0^4 \gamma_2^4 + \gamma_4^4 \gamma_{12}^4) + \gamma_{03}^4 (\gamma_4^4 \gamma_{12}^4 - \gamma_0^4 \gamma_{14}^4) \\ & - \gamma_4^4 (\gamma_5^4 \gamma_{03}^4 + \gamma_{34}^4 \gamma_{14}^4) + \gamma_{12}^4 (\gamma_5^4 \gamma_{03}^4 - \gamma_{34}^4 \gamma_2^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^2 \prod \gamma \cdot t_5 = & \gamma_5^4 (\gamma_{01}^4 \gamma_{03}^4 + \gamma_0^4 \gamma_{23}^4) - \gamma_{14}^4 (\gamma_0^4 \gamma_{23}^4 - \gamma_2^4 \gamma_{01}^4) \\ & + \gamma_0^4 (\gamma_5^4 \gamma_{14}^4 + \gamma_4^4 \gamma_2^4) - \gamma_{23}^4 (\gamma_5^4 \gamma_{14}^4 - \gamma_4^4 \gamma_{03}^4). \end{aligned}$$

2. Si indichino ora con $c_5, c_0, c_{14}, \ldots$ espressioni analoghe alle $\gamma_5, \gamma_0, \gamma_{14}, \ldots$, ma formate colle radici della forma binaria f del sesto ordine appartenente agli integrali normali iperellittici. Rammentando la relazione

$$\xi = 5.2^7 A - t^2$$

della mia prima comunicazione *), oppure la

$$\xi = -\frac{1}{3}\frac{u_{12}}{\delta} - t^2,$$

ed osservando che dai risultati dei dottori MASCHKE e BOLZA **) si deducono le formole seguenti:

$$\begin{aligned}
\rho^2 c_5^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_0+\xi_4+\xi_5), & \rho^2 c_{14}^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_0+\xi_1+\xi_5),\\
\rho^2 c_0^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_1+\xi_4+\xi_5), & \rho^2 c_{01}^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_0+\xi_2+\xi_4),\\
\rho^2 c_{34}^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_2+\xi_4+\xi_5), & \rho^2 c_2^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_0+\xi_2+\xi_5),\\
\rho^2 c_{12}^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_3+\xi_4+\xi_5), & \rho^2 c_4^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_0+\xi_3+\xi_4),\\
\rho^2 c_{23}^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_0+\xi_1+\xi_4), & \rho^2 c_{03}^4 &= -\tfrac{1}{3}(\xi_0+\xi_3+\xi_5),
\end{aligned}$$

si otterranno fra le dieci funzioni c e le dieci γ le relazioni:

$$\begin{aligned}
\rho^2 c_5^4 &= \tfrac{1}{6}(t_0^2+t_4^2+t_5^2-t_1^2-t_2^2-t_3^2), & \rho^2 c_{34}^4 &= \tfrac{1}{6}(t_2^2+t_4^2+t_5^2-t_3^2-t_0^2-t_1^2),\\
\rho^2 c_0^4 &= \tfrac{1}{6}(t_1^2+t_4^2+t_5^2-t_2^2-t_3^2-t_0^2), & \rho^2 c_{12}^4 &= \tfrac{1}{6}(t_3^2+t_4^2+t_5^2-t_0^2-t_1^2-t_2^2),\\
\rho^2 c_{23}^4 &= \tfrac{1}{6}(t_0^2+t_1^2+t_4^2-t_2^2-t_3^2-t_5^2), & \rho^2 c_{14}^4 &= \tfrac{1}{6}(t_0^2+t_1^2+t_5^2-t_2^2-t_3^2-t_4^2),\\
\rho^2 c_{01}^4 &= \tfrac{1}{6}(t_0^2+t_2^2+t_4^2-t_3^2-t_1^2-t_5^2), & \rho^2 c_2^4 &= \tfrac{1}{6}(t_0^2+t_2^2+t_5^2-t_3^2-t_1^2-t_4^2),\\
\rho^2 c_4^4 &= \tfrac{1}{6}(t_0^2+t_3^2+t_4^2-t_1^2-t_2^2-t_5^2), & \rho^2 c_{03}^4 &= \tfrac{1}{6}(t_0^2+t_3^2+t_5^2-t_1^2-t_2^2-t_4^2),
\end{aligned}$$

essendo, come è noto:

$$\rho = \frac{(2\pi i)^2}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}.$$

*) [CXLIX: t. IV, pp. 41-42].

**) MASCHKE, *Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der* BORCHARDT'*schen Moduln* [Mathematische Annalen, t. XXX (1887), pp. 496-515]; BOLZA, *Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen* ϑ-*Functionen* [Ibid., pp. 478-495].

CLI.

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI PEI PERIODI DELLE FUNZIONI IPERELLITTICHE A DUE VARIABILI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume IV (1888, 2° sem.), pp. 341-347, 429-436.

1. È noto dalla teoria delle funzioni ellittiche che, indicando con ω, η i due periodi, g_2, g_3, δ gli invarianti quadratico e cubico ed il discriminante della forma del quarto ordine, posto

$$\frac{g_2^3}{\delta} = J, \qquad y = \omega\,\delta^{\frac{1}{12}}, \qquad z = \eta\,\delta^{-\frac{1}{12}},$$

si hanno fra y, z le relazioni:

$$z = -8\sqrt{3}.J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dJ}, \qquad y = 6\sqrt{3}.J^{\frac{1}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dJ},$$

dalle quali si deducono le due equazioni differenziali ipergeometriche per y e per z, esse pure conosciute *).

Scopo di questa comunicazione è il dimostrare che relazioni analoghe alle superiori sussistono per i periodi delle funzioni iperellittiche $p = 2$.

2. Premetteremo in questo paragrafo la enunciazione di alcuni teoremi relativi agli invarianti assoluti di una forma binaria del sesto ordine. Sia

$$f(x_1, x_2) = A_0 x_1^6 + 6 A_1 x_1^5 x_2 + \cdots + A_6 x_2^6 = A_0 \prod_{0}^{5}{}_{r} (x_1 - a_r x_2)$$

---

*) Si può consultare l'ottimo *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications,* par Mr. HALPHEN. Première Partie (Paris, 1886), pag. 307 e seguenti.

la forma del sesto ordine; e siano

$$k = \tfrac{1}{2}(ff)_4, \qquad h = \tfrac{1}{2}(kk)_2$$

i suoi due covarianti del quarto ordine;

$$l = (fk)_4, \qquad m = (lk)_2, \qquad n = (mk)_2$$

i tre covarianti del secondo ordine; ed A, B, C, G gli invarianti del secondo, quarto, sesto, decimo grado, così definiti:

$$A = \tfrac{1}{2}(ff)_6 = A_0 A_6 - 6 A_1 A_5 + 15 A_2 A_4 - 10 A_3^2,$$

$$B = \tfrac{1}{2}(kk)_4 = k_0 k_4 - 4 k_1 k_3 + 3 k_2^2, \qquad G = \tfrac{1}{2}(mm)_2 = \tfrac{1}{2}(ln)_2,$$

$$C = k_0 k_2 k_4 + 2 k_1 k_2 k_3 - k_0 k_3^2 - k_1^2 k_4 - k_2^3;$$

infine δ il discriminante, il quale, come è noto, si esprime in funzione di A, B, C, G nel modo seguente:

$$(1) \qquad \delta = 3^5 . 4^3 [32 A^2 (5^4 C + 5^3 AB - 4A^3) - 5^5 (8AB^2 + 48 BC + 3G)].$$

Introduco ora i seguenti sei simboli di operazione:

$$P_0 = \sum_0^5{}_r \frac{\partial}{\partial a_r}, \qquad P_1 = \sum_0^5{}_r a_r \frac{\partial}{\partial a_r}, \qquad P_2 = \sum_0^5{}_r (A_0 a_r^2 + 6 A_1 a_r) \frac{\partial}{\partial a_r},$$

$$P_3 = \sum_0^5{}_r (A_0 a_r^3 + 6 A_1 a_r^2 + 15 A_2 a_r) \frac{\partial}{\partial a_r},$$

$$P_4 = \sum_0^5{}_r (A_0 a_r^4 + 6 A_1 a_r^3 + 15 A_2 a_r^2 + 20 A_3 a_r) \frac{\partial}{\partial a_r},$$

$$P_5 = \sum_0^5{}_r (A_0 a_r^5 + 6 A_1 a_r^4 + 15 A_2 a_r^3 + 20 A_3 a_r^2 + 15 A_4 a_r) \frac{\partial}{\partial a_r},$$

ed osservo in primo luogo che pel discriminante δ si hanno le relazioni:

$$P_0(\delta) = 0, \qquad P_1(\delta) = 30\delta, \qquad P_2(\delta) = 120 A_1 \delta,$$

$$P_3(\delta) = 180 A_2 \delta, \qquad P_4(\delta) = 120 A_3 \delta, \qquad P_5(\delta) = 30 A_4 \delta.$$

Indico con a, b, c i tre invarianti assoluti:

$$a = \frac{A}{\delta^{\frac{1}{5}}}, \qquad b = \frac{B}{\delta^{\frac{2}{5}}}, \qquad c = \frac{C}{\delta^{\frac{3}{5}}};$$

si hanno le

$$P_0(a) = P_1(a) = P_2(a) = 0,$$

ed analogamente per b, c; equazioni caratteristiche pei covarianti assoluti; inoltre si trovano le

$$P_3(a) = 15\frac{l_0}{\delta^{\frac{1}{5}}}, \qquad P_4(a) = 30\frac{l_1}{\delta^{\frac{1}{5}}}, \qquad P_5(a) = 15\frac{l_2}{\delta^{\frac{1}{5}}},$$

$$P_3(b) = \frac{3}{5\delta^{\frac{2}{5}}}(4Al_0 - 5m_0), \quad P_4(b) = \frac{6}{5\delta^{\frac{2}{5}}}(4Al_1 - 5m_1), \quad P_5(b) = \frac{3}{5\delta^{\frac{2}{5}}}(4Al_2 - 5m_2),$$

$$P_3(c) = \frac{3}{10\delta^{\frac{3}{5}}}(5n_0 + 2Am_0 - 10Bl_0),$$

$$P_4(c) = \frac{6}{10\delta^{\frac{3}{5}}}(5n_1 + 2Am_1 - 10Bl_1),$$

$$P_5(c) = \frac{3}{10\delta^{\frac{3}{5}}}(5n_2 + 2Am_2 - 10Bl_2),$$

nelle quali l_0, l_1, l_2; m_0, m_1, m_2; n_0, n_1, n_2 sono i coefficienti dei covarianti quadratici l, m, n.

Dai precedenti risultati emerge tosto la opportunità di questi altri simboli di operazione:

$$L(\psi) = l_2 P_3(\psi) - l_1 P_4(\psi) + l_0 P_5(\psi),$$

$$M(\psi) = m_2 P_3(\psi) - m_1 P_4(\psi) + m_0 P_5(\psi),$$

$$N(\psi) = n_2 P_3(\psi) - n_1 P_4(\psi) + n_0 P_5(\psi),$$

in quanto che, come è noto, essi dànno per $L(a)$, $L(b)$, ... delle funzioni intiere, razionali, dei quattro invarianti sopra indicati divisi per le potenze frazionarie corrispondenti di δ. Ponendo altresì

$$L(a) = a_1\delta^{\frac{2}{5}}, \qquad L(b) = b_1\delta^{\frac{2}{5}}, \qquad L(c) = c_1\delta^{\frac{2}{5}},$$

$$M(a) = a_2\delta^{\frac{3}{5}}, \qquad M(b) = b_2\delta^{\frac{3}{5}}, \qquad M(c) = c_2\delta^{\frac{3}{5}},$$

$$N(a) = a_3\delta^{\frac{4}{5}}, \qquad N(b) = b_3\delta^{\frac{4}{5}}, \qquad N(c) = c_3\delta^{\frac{4}{5}},$$

si avrà che le $a_1, b_1, \ldots$ saranno funzioni intiere, razionali, dei soli invarianti assoluti a, b, c; giacchè l'invariante assoluto $g = \frac{G}{\delta}$ è esso pure funzione razionale, intiera di quei primi per la relazione (1).

Posto

$$a_4 = b a_2 + 2 c a_1, \qquad a_5 = b a_3 + 2 c a_2,$$

si hanno per le nove quantità $a_1, b_1, \ldots$ i seguenti valori:

$$a_1 = 20(ab + 18c), \qquad a_2 = 40(2b^2 + 3ac), \qquad a_3 = 30g,$$

$$b_1 = \tfrac{1}{25}(4aa_1 - 5a_2), \qquad b_2 = \tfrac{1}{25}(4aa_2 - 5a_3), \qquad b_3 = \tfrac{1}{25}(4aa_3 - 5a_4),$$

$$c_1 = \tfrac{1}{50}(5a_3 + 2aa_2 - 10ba_1),$$

$$c_2 = \tfrac{1}{50}(5a_4 + 2aa_3 - 10ba_2),$$

$$c_3 = \tfrac{1}{50}(5a_5 + 2aa_4 - 10ba_3).$$

Posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{50} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix},$$

trovasi essere

$$\Delta = -5 \cdot 3^3 \frac{R^3}{\delta^2},$$

nella quale R è il noto invariante del quindicesimo grado:

$$R = \begin{vmatrix} l_0 & l_1 & l_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \\ n_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix}.$$

3. Indico con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i determinanti minori di Δ ed introduco le seguenti denominazioni:

$$a_6 = b a_4 + 2 c a_3, \qquad a_7 = b a_5 + 2 c a_4,$$

$$b_4 = b b_2 + 2 c b_1, \qquad b_5 = b b_3 + 2 c b_2,$$

$$c_4 = b c_2 + 2 c c_1, \qquad c_5 = b c_3 + 2 c c_2.$$

Alle note nove relazioni fra le $a_1, a_2, \ldots$ e le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aggiungo le seguenti

deducibili da esse ed alle quali dovremo richiamarci in seguito:

$$\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_3 + \alpha_3 a_4 = \tfrac{4}{5} a \Delta, \qquad \alpha_1 a_4 + \alpha_2 a_5 + \alpha_3 a_6 = \tfrac{2}{5}(2ab + 5c)\Delta,$$

$$\alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_4 + \alpha_3 a_5 = -\tfrac{2}{25}(4a^2 - 25b)\Delta, \quad \alpha_1 a_5 + \alpha_2 a_6 + \alpha_3 a_7 = \tfrac{2}{25}(25b^2 - 4a^2 b + 20ac)\Delta,$$

e quindi:

$$\alpha_1 b_2 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 b_4 = \frac{2}{5^3}(12a^2 - 25b)\Delta,$$

$$\alpha_1 b_3 + \alpha_2 b_4 + \alpha_3 b_5 = -\frac{2}{5^4}(16a^3 - 50ab + 125c)\Delta,$$

$$\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_3 + \alpha_3 c_4 = -\frac{1}{5^4}(8a^3 - 125c)\Delta,$$

$$\alpha_1 c_3 + \alpha_2 c_4 + \alpha_3 c_5 = \frac{1}{5^3}(8a^2 b - 25b^2 + 30ac)\Delta,$$

ed analogamente:

$$\beta_1 a_2 + \beta_2 a_3 + \beta_3 a_4 = -5\Delta, \qquad \beta_1 a_3 + \beta_2 a_4 + \beta_3 a_5 = 2a\Delta,$$

$$\beta_1 b_2 + \beta_2 b_3 + \beta_3 b_4 = -\tfrac{6}{5} a\Delta, \qquad \beta_1 b_3 + \beta_2 b_4 + \beta_3 b_5 = \tfrac{1}{25}(8a^2 + 25b)\Delta,$$

$$\beta_1 c_2 + \beta_2 c_3 + \beta_3 c_4 = \tfrac{1}{50}(4a^2 + 25b)\Delta, \quad \beta_1 c_3 + \beta_2 c_4 + \beta_3 c_5 = -\tfrac{1}{5}(2ab + 5c)\Delta,$$

$$\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_3 + \gamma_3 a_4 = 0, \qquad \gamma_1 a_3 + \gamma_2 a_4 + \gamma_3 a_5 = 10\Delta,$$

$$\gamma_1 b_2 + \gamma_2 b_3 + \gamma_3 b_4 = -2\Delta, \qquad \gamma_1 b_3 + \gamma_2 b_4 + \gamma_3 b_5 = \tfrac{8}{5} a\Delta,$$

$$\gamma_1 c_2 + \gamma_2 c_3 + \gamma_3 c_4 = \tfrac{4}{5} a\Delta, \qquad \gamma_1 c_3 + \gamma_2 c_4 + \gamma_3 c_5 = -b\Delta.$$

Ed altresì per l'uso di cui dovrà farsene in seguito rammentiamo le relazioni seguenti:

$$(nk)_2 = Bm + 2Cl,$$

$$(fl)_2 = \tfrac{2}{3}(Ak + 12h), \qquad (fm)_2 = \tfrac{1}{2} l^2 + \tfrac{4}{3}(Bk + Ah),$$

$$(fn)_2 = lm + \tfrac{8}{3} Bh - 4Ck,$$

$$(hl)_2 = \tfrac{1}{6}(3n - 2Bl), \qquad (hm)_2 = \tfrac{1}{6} Bm + Cl, \qquad (hn)_2 = \tfrac{1}{6} Bn + Cm.$$

4. Sia ψ una funzione dei coefficienti $A_0, A_1, \ldots$ della forma $f(x_1, x_2)$, o

delle radici $a_0, a_1, \ldots$; se la funzione stessa soddisfa le tre equazioni

$$P_0(\psi) = 0, \qquad P_1(\psi) = 0, \qquad P_2(\psi) = 0,$$

essa è un invariante assoluto della forma f, ed in questo caso si avrà:

$$L(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial a} L(a) + \frac{\partial \psi}{\partial b} L(b) + \frac{\partial \psi}{\partial c} L(c),$$

ed analoghe.

5. Indico con ω_{1m}, ω_{2m}; η_{1m}, η_{2m} $(m = 1, 2, 3, 4)$ i periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili corrispondenti alla forma del sesto ordine $f(x_1, x_2)$. Posto col Prof. KLEIN

$$p_{rs} = \omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{1s}\omega_{2r} = -p_{sr},$$

si hanno, come è noto, fra le sei quantità p_{rs} due relazioni, la prima

$$p_{13} + p_{24} = 0,$$

che include una proprietà dei periodi; la seconda

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

che è una identità.

Porremo analogamente

$$q_{rs} = \eta_{1r}\eta_{2s} - \eta_{1s}\eta_{2r} = -q_{sr},$$

e si hanno fra le sei quantità q_{rs} le relazioni:

$$q_{13} + q_{24} = 0, \qquad q_{12}q_{34} + q_{13}q_{42} + q_{14}q_{23} = 0.$$

Dai valori di ω_{1m}, ω_{2m} si ricavano tosto le

$$\begin{aligned} P_0(\omega_{1m}) &= 0, & P_0(\omega_{2m}) &= -\omega_{1m}, \\ P_1(\omega_{1m}) &= -2\omega_{1m}, & P_1(\omega_{2m}) &= -\omega_{2m}, \\ P_2(\omega_{1m}) &= A_0\omega_{2m} - 9A_1\omega_{1m}, & P_2(\omega_{2m}) &= -3A_1\omega_{2m}; \end{aligned}$$

ed analogamente per η_{1m}, η_{2m} si hanno:

$$\begin{aligned} P_0(\eta_{1m}) &= \eta_{2m}, & P_0(\eta_{2m}) &= 0, \\ P_1(\eta_{1m}) &= 2\eta_{1m}, & P_1(\eta_{2m}) &= \eta_{2m}, \\ P_2(\eta_{1m}) &= 9A_1\eta_{1m}, & P_2(\eta_{2m}) &= -A_0\eta_{1m} + 3A_1\eta_{2m}. \end{aligned}$$

Se quindi si indicano con y, z le espressioni

$$y = p_{rs}\delta^{\frac{1}{10}}, \qquad z = q_{rs}\delta^{-\frac{1}{10}},$$

si ottengono le

$$P_0(y) = P_1(y) = P_2(y) = 0, \qquad P_0(z) = P_1(z) = P_2(z) = 0,$$

le quali dimostrano essere y, z invarianti assoluti.

Si introducano ora i seguenti tre ordini di espressioni:

$$t_{rs} = \omega_{1r}\eta_{2s} - \omega_{1s}\eta_{2r},$$

$$u_{rs} = \omega_{1r}\eta_{1s} - \omega_{1s}\eta_{1r} + \omega_{2s}\eta_{2r} - \omega_{2r}\eta_{2s},$$

$$v_{rs} = \eta_{1r}\omega_{2s} - \eta_{1s}\omega_{2r};$$

si trovano essere

$$P_3(y) = -\tfrac{1}{2}\delta^{\frac{1}{10}}t_{rs}, \qquad P_4(y) = \tfrac{1}{2}\delta^{\frac{1}{10}}u_{rs}, \qquad P_5(y) = -\tfrac{1}{2}\delta^{\frac{1}{10}}v_{rs},$$

dalle quali, ponendo

$$t = \delta^{-\frac{3}{10}}(l_2\, t_{rs} + l_1\, u_{rs} + l_0\, v_{rs}),$$

$$u = \delta^{-\frac{5}{10}}(m_2 t_{rs} + m_1 u_{rs} + m_0 v_{rs}),$$

$$v = \delta^{-\frac{7}{10}}(n_2\, t_{rs} + n_1\, u_{rs} + n_0\, v_{rs}),$$

si deducono le tre rimarchevoli relazioni:

$$L(y) = -\tfrac{1}{2}\delta^{\frac{2}{5}}t, \qquad M(y) = -\tfrac{1}{2}\delta^{\frac{3}{5}}u, \qquad N(y) = -\tfrac{1}{2}\delta^{\frac{4}{5}}v,$$

ossia:

$$t = -2\left(a_1\frac{\partial y}{\partial a} + b_1\frac{\partial y}{\partial b} + c_1\frac{\partial y}{\partial c}\right),$$

$$u = -2\left(a_2\frac{\partial y}{\partial a} + b_2\frac{\partial y}{\partial b} + c_2\frac{\partial y}{\partial c}\right),$$

$$v = -2\left(a_3\frac{\partial y}{\partial a} + b_3\frac{\partial y}{\partial b} + c_3\frac{\partial y}{\partial c}\right).$$

6. Le tre quantità t, u, v sono esse pure invarianti assoluti della forma $f(x_1, x_2)$; esse soddisfano infatti alle relazioni:

$$P_0(t) = P_1(t) = P_2(t) = 0, \quad P_0(u) = P_1(u) = P_2(u) = 0, \quad P_0(v) = P_1(v) = P_2(v) = 0,$$

e dànno per le nove funzioni

$$\delta^{-\frac{2}{5}}L(t), \qquad \delta^{-\frac{2}{5}}L(u), \qquad \delta^{-\frac{2}{5}}L(v); \qquad \delta^{-\frac{3}{5}}M(t), \qquad \ldots$$

delle espressioni lineari di t, u, v, y, z, di cui i coefficienti sono funzioni degli invarianti assoluti a, b, c.

Queste prime relazioni differenziali corrispondono a quelle della teoria delle funzioni ellittiche rammentate nel primo paragrafo. La determinazione delle medesime formerà argomento di una prossima comunicazione.

7. Si è osservato precedentemente che la quantità

$$z = \delta^{-\frac{1}{10}} q_{rs}$$

è un invariante assoluto; e si trovano pei valori di $P_3(z)$, $P_4(z)$, $P_5(z)$ le seguenti espressioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} P_3(z) = \frac{3}{5}\delta^{-\frac{1}{10}}[\quad A t_{rs} + 10(k_2 t_{rs} + k_1 u_{rs} + k_0 v_{rs})], \\ P_4(z) = \frac{3}{5}\delta^{-\frac{1}{10}}[- A u_{rs} + 20(k_3 t_{rs} + k_2 u_{rs} + k_1 v_{rs})], \\ P_5(z) = \frac{3}{5}\delta^{-\frac{1}{10}}[\quad A v_{rs} + 10(k_4 t_{rs} + k_3 u_{rs} + k_2 v_{rs})], \end{cases}$$

dalle quali si dedurranno fra la z e le t, u, v le tre equazioni differenziali:

$$L(z) = \frac{3}{5}\delta^{\frac{2}{5}}(at + 10u),$$
$$M(z) = \frac{3}{5}\delta^{\frac{3}{5}}(au + 10v),$$
$$N(z) = \frac{3}{5}\delta^{\frac{4}{5}}(av + 10w),$$

posto $w = bu + 2ct$; ed a, b, c, come sopra, sono i tre covarianti assoluti della forma $f(x_1, x_2)$.

Ora osservando che, per le relazioni stabilite nel n° 3, si hanno le

$$\alpha_1 t + \alpha_2 u + \alpha_3 v = -2\Delta\frac{\partial y}{\partial a},$$
$$\beta_1 t + \beta_2 u + \beta_3 v = -2\Delta\frac{\partial y}{\partial b},$$
$$\gamma_1 t + \gamma_2 u + \gamma_3 v = -2\Delta\frac{\partial y}{\partial c},$$

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = -2\Delta\left[\frac{4}{5}a\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{2}{5^3}(12a^2 - 25b)\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{1}{5^4}(8a^3 - 125c)\frac{\partial y}{\partial c}\right],$$

$$\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w = -2\Delta\left[-5\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{6}{5}a\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{1}{50}(4a^2 + 25b)\frac{\partial y}{\partial c}\right],$$

$$\gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w = -2\Delta\left[-2\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{4}{5}a\frac{\partial y}{\partial c}\right],$$

se si moltiplicano le equazioni (2) per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e si sommano, si giunge al seguente risultato:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{6}{5}\left[9a\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{4}{25}(12a^2 - 25b)\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{2}{125}(8a^3 - 125c)\frac{\partial y}{\partial c}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = -\frac{6}{5}\left[-50\frac{\partial y}{\partial a} - 11a\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{1}{5}(4a^2 + 25b)\frac{\partial y}{\partial c}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial c} = -\frac{6}{5}\left[-20\frac{\partial y}{\partial b} + 9a\frac{\partial y}{\partial c}\right].$$

Queste relazioni differenziali si semplificano sostituendo alle variabili a, b, c le α, β, γ definite dalle

$$\alpha = a, \qquad \beta = 2a^2 - 25b, \qquad \gamma = 4a^3 - 75ab - 375c,$$

trasformandosi nelle

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\frac{6}{5}\left[\alpha\frac{\partial y}{\partial \alpha} + 2(14\alpha^3 - 9\alpha\beta + \gamma)\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = -\frac{6}{5}\left[2\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \alpha\frac{\partial y}{\partial \beta} - 3(6\alpha^2 - \beta)\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial \gamma} = -\frac{6}{5}\left[-\frac{4}{3}\frac{\partial y}{\partial \beta} + 5\alpha\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right],$$

dalle quali si deducono le tre equazioni differenziali parziali del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} - \frac{3}{2}(6\alpha^2 - \beta)\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \gamma} - (14\alpha^3 - 9\alpha\beta + \gamma)\frac{\partial^2 y}{\partial \beta \partial \gamma} - 9\alpha\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} - 3\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \gamma} + \frac{3}{2}(14\alpha^2 - 9\alpha\beta + \gamma)\frac{\partial^2 y}{\partial \gamma^2} - \frac{9}{4}\frac{\partial y}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \gamma} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} - \alpha\frac{\partial^2 y}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{3}{2}(6\alpha^2 - \beta)\frac{\partial^2 y}{\partial \gamma^2} = 0.$$

Sono queste le equazioni, le quali corrispondono alla nota equazione ipergeometrica nel caso delle funzioni ellittiche.

8. Essendo

$$P_0(p_{rs}) = 0, \qquad P_1(p_{rs}) = -3p_{rs}, \qquad P_2(p_{rs}) = -12A_1 p_{rs},$$

il rapporto di due qualunque fra le sei quantità p_{rs}, e similmente delle q_{rs}, è un invariante assoluto.

Essendo inoltre

$$P_3\left(\frac{p_{ir}}{p_{is}}\right) = \frac{\omega_{1i}}{2p_{is}^2}(p_{rs}\eta_{2i} + p_{si}\eta_{2r} + p_{ir}\eta_{2s}),$$

$$P_4\left(\frac{p_{ir}}{p_{is}}\right) = \frac{1}{2p_{is}^2}[\omega_{2i}(p_{rs}\eta_{2i} + p_{si}\eta_{2r} + p_{ir}\eta_{2s}) + \omega_{1i}(p_{sr}\eta_{1i} + p_{is}\eta_{1r} + p_{ri}\eta_{1s})],$$

$$P_5\left(\frac{p_{ir}}{p_{is}}\right) = \frac{\omega_{2i}}{2p_{is}^2}(p_{sr}\eta_{1i} + p_{is}\eta_{1r} + p_{ri}\eta_{1s}),$$

posto

$$\tau_{11} = \frac{p_{32}}{p_{12}}, \qquad \tau_{12} = \frac{p_{13}}{p_{12}} = \frac{p_{42}}{p_{12}}, \qquad \tau_{22} = \frac{p_{14}}{p_{12}},$$

da cui

$$\frac{p_{34}}{p_{12}} = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2,$$

si hanno le

$$P_3(\tau_{11}) = \frac{\pi i}{4}\frac{\omega_{12}^2}{p_{12}^2}, \qquad P_4(\tau_{11}) = \frac{\pi i}{2}\frac{\omega_{12}\omega_{22}}{p_{12}^2}, \qquad P_5(\tau_{11}) = \frac{\pi i}{4}\frac{\omega_{22}^2}{p_{12}^2},$$

$$P_3(\tau_{12}) = -\frac{\pi i}{4}\frac{\omega_{11}\omega_{12}}{p_{12}^2}, \quad P_4(\tau_{12}) = -\frac{\pi i}{4}\frac{\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}}{p_{12}^2}, \quad P_5(\tau_{12}) = -\frac{\pi i}{4}\frac{\omega_{21}\omega_{22}}{p_{12}^2},$$

$$P_3(\tau_{22}) = \frac{\pi i}{4}\frac{\omega_{11}^2}{p_{12}^2}, \qquad P_4(\tau_{22}) = \frac{\pi i}{2}\frac{\omega_{11}\omega_{21}}{p_{12}^2}, \qquad P_5(\tau_{22}) = \frac{\pi i}{4}\frac{\omega_{21}^2}{p_{12}^2}.$$

Sia ora σ una funzione dei periodi ω_{rs} per la quale sussistano le relazioni:

$$P_0(\sigma) = 0, \qquad P_1(\sigma) = 0, \qquad P_2(\sigma) = 0,$$

sarà:

$$P_3(\sigma) = \frac{\partial\sigma}{\partial\tau_{11}}P_3(\tau_{11}) + \frac{\partial\sigma}{\partial\tau_{12}}P_3(\tau_{12}) + \frac{\partial\sigma}{\partial\tau_{22}}P_3(\tau_{22}),$$

ed analogamente per $P_4(\sigma)$, $P_5(\sigma)$. Da queste tre equazioni si dedurranno così le

seguenti:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi i}{4}\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau_{11}} = \omega_{21}^2 P_3(\sigma) - \omega_{21}\omega_{11} P_4(\sigma) + \omega_{11}^2 P_5(\sigma), \\ \dfrac{\pi i}{4}\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau_{12}} = 2\omega_{21}\omega_{22} P_3(\sigma) - (\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}) P_4(\sigma) + 2\omega_{12}\omega_{11} P_5(\sigma), \\ \dfrac{\pi i}{4}\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau_{22}} = \omega_{22}^2 P_3(\sigma) - \omega_{12}\omega_{22} P_4(\sigma) + \omega_{12}^2 P_5(\sigma). \end{cases}$$

9. Dimostrasi facilmente che ogni covariante della forma $f(x_1, x_2)$, in cui l'ordine sia *doppio* del grado e nel quale alle x_1, x_2 si sostituiscano i periodi ω_{2r}, $-\omega_{1r}$; come pure le polari dei covarianti stessi, nelle quali si sostituiscano alle y_1, y_2 i periodi ω_{2s}, $-\omega_{1s}$, sono invarianti assoluti della stessa forma f. Così, per esempio, dalla forma $f(x_1, x_2)$ e dai covarianti $k(x_1, x_2)$, $l(x_1, x_2)$, $m(x_1, x_2)$, $n(x_1, x_2)$ si deducono gli invarianti assoluti:

$$Af(\omega_{2r}, -\omega_{1r}), \qquad k(\omega_{2r}, -\omega_{1r}),$$

$$\delta^{-\frac{1}{5}} l(\omega_{2r}, -\omega_{1r}), \qquad \delta^{-\frac{2}{5}} m(\omega_{2r}, -\omega_{1r}), \qquad \delta^{-\frac{3}{5}} n(\omega_{2r}, -\omega_{1r});$$

e saranno pure invarianti assoluti:

$$Ap_{rs}^2, \qquad Bp_{rs}^4, \qquad Cp_{rs}^6,$$

e così via.

Pongasi

$$\delta^{-\frac{1}{5}}[l_0\omega_{21}^2 - 2l_1\omega_{21}\omega_{11} + l_2\omega_{11}^2] = l_{11},$$

$$\delta^{-\frac{1}{5}}[l_0\omega_{21}\omega_{22} - l_1(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}) + l_2\omega_{11}\omega_{12}] = l_{12},$$

$$\delta^{-\frac{1}{5}}[l_0\omega_{22}^2 - 2l_1\omega_{22}\omega_{12} + l_2\omega_{12}^2] = l_{22},$$

ed analogamente per m_{11}, m_{12}, ... Sostituendo nelle ultime formole del n° precedente gli invarianti assoluti α, β, γ alla σ, si hanno le equazioni:

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_{11}} = 15 l_{11}, \qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_{12}} = 30 l_{12}, \qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_{22}} = 15 l_{22},$$

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial\beta}{\partial\tau_{11}} = 75 m_{11}, \qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial\beta}{\partial\tau_{12}} = 150 m_{12}, \qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial\beta}{\partial\tau_{22}} = 75 m_{22},$$

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau_{11}} = -\frac{3^2 \cdot 5^3}{2} n_{11}, \qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau_{12}} = -3^2 \cdot 5^3 n_{12}, \qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau_{22}} = -\frac{3^2 \cdot 5^3}{2} n_{22},$$

dalle quali:

$$\frac{\pi^3 i}{4^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_{11}} & \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_{12}} & \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_{22}} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \tau_{11}} & \frac{\partial \beta}{\partial \tau_{12}} & \frac{\partial \beta}{\partial \tau_{22}} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \tau_{11}} & \frac{\partial \gamma}{\partial \tau_{12}} & \frac{\partial \gamma}{\partial \tau_{22}} \end{vmatrix} = 3^4 \cdot 5^6 \cdot \frac{R}{\delta^{\frac{3}{2}}} \cdot y^3 ,$$

essendo, come sopra,

$$y = \delta^{\frac{1}{10}} p_{12} .$$

Ora $\delta^{-3} R^2$ è una funzione razionale, intiera di α, β, γ; la formola superiore corrisponde quindi alla analoga delle funzioni ellittiche.

10. Si è trovato per quest'ultimo valore di y essere

$$P_3(y) = -\tfrac{1}{2}\delta^{\frac{1}{10}} t_{12} , \quad P_4(y) = \tfrac{1}{2}\delta^{\frac{1}{10}} u_{12} , \quad P_5(y) = -\tfrac{1}{2}\delta^{\frac{1}{10}} v_{12} ;$$

sostituendo quindi y a σ nelle formole (3), si ottengono le tre seguenti:

$$(4) \qquad \frac{\pi i}{2}\frac{\partial \log y}{\partial \tau_{11}} = -g_{11} , \quad \frac{\pi i}{2}\frac{\partial \log y}{\partial \tau_{12}} = -2 g_{12} , \quad \frac{\pi i}{2}\frac{\partial \log y}{\partial \tau_{22}} = -g_{22} ,$$

essendo

$$g_{rs} = \omega_{1r}\eta_{1s} + \omega_{2r}\eta_{2s} .$$

Le quantità g_{rs}, per le quali, come è noto:

$$g_{rs} - g_{sr} = 0, \qquad \text{oppure} \qquad g_{rs} - g_{sr} = \pm \frac{\pi i}{2} ,$$

secondo che $r + s$ è numero dispari o pari, sono invarianti assoluti. Si hanno infatti le

$$\frac{\pi i}{2} g_{12} = p_{24} q_{12} - q_{24} p_{12} , \qquad \frac{\pi i}{2} g_{13} = p_{12} q_{43} + p_{24} q_{42} + p_{41} q_{23} ,$$

e così di seguito; le quali dimostrano la proprietà indicata.

I valori di $P_3(g_{rs})$, $P_4(g_{rs})$, $P_5(g_{rs})$ hanno molta importanza in queste ricerche.

Essi sono:

$$
\begin{aligned}
P_3(g_{rs}) = {} & 6[k_0\omega_{2r}\omega_{2s} - k_1(\omega_{1r}\omega_{2s} + \omega_{1s}\omega_{2r}) + k_2\omega_{1r}\omega_{1s}] \\
& + \tfrac{3}{5}A\omega_{1r}\omega_{1s} - \tfrac{1}{2}\eta_{2r}\eta_{2s}, \\
P_4(g_{rs}) = {} & 12[k_1\omega_{2r}\omega_{2s} - k_2(\omega_{1r}\omega_{2s} + \omega_{1s}\omega_{2r}) + k_3\omega_{1r}\omega_{1s}] \\
& + \tfrac{3}{5}A(\omega_{1r}\omega_{2s} + \omega_{1s}\omega_{2r}) + \tfrac{1}{2}(\eta_{1r}\eta_{2s} + \eta_{1s}\eta_{2r}), \\
P_5(g_{rs}) = {} & 6[k_2\omega_{2r}\omega_{2s} - k_3(\omega_{1r}\omega_{2s} + \omega_{1s}\omega_{2r}) + k_4\omega_{1r}\omega_{1s}] \\
& + \tfrac{3}{5}A\omega_{2r}\omega_{2s} - \tfrac{1}{2}\eta_{1r}\eta_{1s},
\end{aligned}
$$

e conducono, col mezzo delle formole (3), al seguente gruppo di equazioni differenziali:

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{11}}{\partial \tau_{11}} + \frac{1}{2}g_{11}^2 = 6K_0, \qquad && \frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{11}}{\partial \tau_{22}} + \frac{1}{2}g_{12}^2 = 6K_2 + \frac{3}{5}Ap_{12}^2, \\
&\frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{12}}{\partial \tau_{11}} + \frac{1}{2}g_{11}g_{12} = 6K_1, && \frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{12}}{\partial \tau_{22}} + \frac{1}{2}g_{12}g_{22} = 6K_3, \\
&\frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{22}}{\partial \tau_{11}} + \frac{1}{2}g_{12}^2 = 6K_2 + \frac{3}{5}Ap_{12}^2, && \frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{22}}{\partial \tau_{22}} + \frac{1}{2}g_{22}^2 = 6K_4, \\
&\qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{11}}{\partial \tau_{12}} + g_{11}g_{12} = 12K_1, \\
&\qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{12}}{\partial \tau_{12}} + \frac{1}{2}(g_{11}g_{22} + g_{12}^2) = 12K_2 - \frac{3}{5}Ap_{12}^2, \\
&\qquad \frac{\pi i}{4}\frac{\partial g_{22}}{\partial \tau_{12}} + g_{12}g_{22} = 12K_3,
\end{aligned}
\right.
$$

nelle quali si è rappresentato con K_0 il covariante $k(x_1, x_2)$ sostituendo in esso alle x_1, x_2 le ω_{21}, $-\omega_{11}$; e con K_1, K_2, ... le successive polari dello stesso covariante, posto $y_1 = \omega_{22}$, $y_2 = -\omega_{12}$.

Si noti che le equazioni superiori dimostrano la esistenza delle relazioni:

$$
\frac{\partial g_{11}}{\partial \tau_{22}} = \frac{\partial g_{22}}{\partial \tau_{11}}, \qquad \frac{\partial g_{11}}{\partial \tau_{12}} = 2\frac{\partial g_{12}}{\partial \tau_{11}}, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial \tau_{12}} = 2\frac{\partial g_{12}}{\partial \tau_{22}}.
$$

Posto

$$
z = \delta^{-\frac{1}{10}}q_{12},
$$

e perciò

$$
x = yz = p_{12}q_{12},
$$

vedesi facilmente essere

$$x = g_{11} g_{22} - g_{12}^2,$$

e da questa, per le equazioni differenziali (5), si deducono le seguenti:

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial x}{\partial \tau_{11}} + \frac{1}{2} g_{11} x = \frac{3}{5} a g_{11} y^2 + 6(K_0 g_{22} - 2K_1 g_{12} + K_2 g_{11}),$$

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial x}{\partial \tau_{12}} + g_{12} x = \frac{6}{5} a g_{12} y^2 + 12(K_1 g_{22} - 2K_2 g_{12} + K_3 g_{11}),$$

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial x}{\partial \tau_{22}} + \frac{1}{2} g_{22} x = \frac{3}{5} a g_{22} y^2 + 6(K_2 g_{22} - 2K_3 g_{12} + K_4 g_{11}).$$

11. I secondi membri delle equazioni differenziali (5) sono, pel teorema enunciato sopra, altrettanti invarianti assoluti della forma f. Indicando con φ il covariante di sesto ordine e terzo grado

$$\varphi = (fk)_2,$$

e con ψ il covariante dello stesso ordine e grado

$$\psi = \frac{1}{5} Af - \varphi,$$

infine con Ψ_0, Ψ_1, ... Ψ_6 le funzioni che si ottengono da ψ colle sostituzioni già usate precedentemente, si ottengono queste altre equazioni differenziali:

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial K_0}{\partial \tau_{11}} + 2 g_{11} K_0 = 12 \Psi_0,$$

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial K_0}{\partial \tau_{12}} + 2(g_{11} K_1 + g_{12} K_0) = 24 \Psi_1,$$

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial K_0}{\partial \tau_{22}} + 2 g_{12} K_1 = 12 \Psi_2 + \frac{9}{5} l_{11} y^2,$$

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial K_1}{\partial \tau_{11}} + \frac{1}{2}(g_{12} K_0 + 3 g_{11} K_1) = 12 \Psi_1,$$

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial K_1}{\partial \tau_{12}} + (g_{22} K_0 + 2 g_{12} K_1 + g_{11} K_2) = 24 \Psi_2 - \frac{9}{10} l_{11} y^2,$$

$$\frac{\pi i}{4} \frac{\partial K_1}{\partial \tau_{22}} + \frac{1}{2}(g_{22} K_1 + 3 g_{12} K_2) = 12 \Psi_3 + \frac{9}{10} l_{12} y^2,$$

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial K_2}{\partial \tau_{11}} + g_{12}K_1 + g_{11}K_2 = 12\Psi_2 + \frac{3}{10}l_{11}y^2,$$

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial K_2}{\partial \tau_{12}} + g_{22}K_1 + 2g_{12}K_2 + g_{11}K_3 = 24\Psi_3 - \frac{6}{5}l_{12}y^2,$$

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial K_2}{\partial \tau_{22}} + g_{22}K_2 + g_{12}K_3 = 12\Psi_4 + \frac{3}{10}l_{22}y^2,$$

e così quelle per K_3, K_4, che si deducono dalle superiori per K_1, K_0. Anche i secondi membri delle quindici equazioni differenziali così stabilite sono invarianti assoluti di f e le loro derivazioni rispetto a τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} riprodurrebbero le funzioni stesse moltiplicate per g_{11}, g_{12}, g_{22} e nuove funzioni, che si deducono da covarianti dell'ottavo ordine e del quarto grado di f mediante la sostituzione più volte indicata.

12. Sia t una funzione di g_{11}, g_{12}, g_{22}; τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}; di y e di due variabili v_1, v_2 legate ad altre due u_1, u_2 dalle relazioni:

$$v_1 = \frac{1}{2p_{12}}(u_1\omega_{22} - u_2\omega_{12}), \qquad v_2 = \frac{1}{2p_{12}}(u_2\omega_{11} - u_1\omega_{21}).$$

Essendo, per quanto si è dimostrato nei precedenti paragrafi:

$$P_0(g_{rs}) = P_0(\tau_{rs}) = P_0(y) = 0,$$

ed analogamente pei simboli di operazione P_1 e P_2, si hanno le

$$(6)\quad \begin{cases} P_0(t) = u_1\dfrac{\partial t}{\partial u_2}, \qquad P_1(t) = 2u_1\dfrac{\partial t}{\partial u_1} + u_2\dfrac{\partial t}{\partial u_2}, \\[2ex] P_2(t) = -A_0u_2\dfrac{\partial t}{\partial u_1} + 3A_1\left(3u_1\dfrac{\partial t}{\partial u_1} + u_2\dfrac{\partial t}{\partial u_2}\right). \end{cases}$$

Se t è una funzione omogenea di v_1, v_2 e quindi di u_1, u_2, dell'ordine m, da queste equazioni deducesi essere la funzione t, nella quale pongasi $u_1 = -x_2$, $u_2 = x_1$, un covariante di f del grado $\frac{1}{2}m$.

Si ottengono inoltre le

$$(7)\quad \begin{cases} P_3(t) = (15A_2u_1 - 3A_1u_2)\dfrac{\partial t}{\partial u_1} + \left(3A_2u_2 - A_3u_1 + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)\dfrac{\partial t}{\partial u_2} + Q_3(t), \\[2ex] P_4(t) = \left(11A_3u_1 - 3A_2u_2 - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)\dfrac{\partial t}{\partial u_1} + \left(A_3u_2 - 3A_4u_1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)\dfrac{\partial t}{\partial u_2} + Q_4(t), \\[2ex] P_5(t) = \left(3A_4u_1 - A_3u_2 + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)\dfrac{\partial t}{\partial u_1} - 3A_5u_1\dfrac{\partial t}{\partial u_2} + Q_5(t), \end{cases}$$

nelle quali le $Q_3(t)$, $Q_4(t)$, $Q_5(t)$ rappresentano le operazioni P_3, P_4, P_5 eseguite sulle g_{rs}, τ_{rs}, y contenute in t, e quindi:

$$Q_3(t) = \sum \frac{\partial t}{\partial g_{rs}} P_3(g_{rs}) + \sum \frac{\partial t}{\partial \tau_{rs}} P_3(\tau_{rs}) + \frac{\partial t}{\partial y} P_3(y),$$

ed analogamente per Q_4, Q_5; inoltre:

$$\varphi = 4(g_{11} v_1^2 + 2 g_{12} v_1 v_2 + g_{22} v_2^2) = \frac{1}{p_{12}} (C_0 u_2^2 + 2 C_1 u_2 u_1 + C_2 u_1^2),$$

posto

$$C_0 = \omega_{11} \eta_{22} - \omega_{12} \eta_{21} = t_{12}, \qquad C_2 = \eta_{11} \omega_{22} - \eta_{12} \omega_{21} = v_{12},$$

$$C_1 = \omega_{11} \eta_{12} - \omega_{12} \eta_{11} = \omega_{22} \eta_{21} - \omega_{21} \eta_{22} = \tfrac{1}{2} u_{12}.$$

Indicando con

$$\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

una qualunque delle sedici funzioni theta, pongasi

$$\vartheta(v_1, v_2) = t;$$

dalle note relazioni

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_1^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{11}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_1 \partial v_2} - 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{12}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_2^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{22}} = 0,$$

si deducono le seguenti:

$$\frac{1}{16} \frac{\partial^2 t}{\partial v_1^2} = \frac{\pi i}{4} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_{11}} + \sum \frac{\partial t}{\partial g_{rs}} \frac{\partial g_{rs}}{\partial \tau_{11}} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau_{11}} \right),$$

$$\frac{1}{8} \frac{\partial^2 t}{\partial v_1 \partial v_2} = \frac{\pi i}{4} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_{12}} + \sum \frac{\partial t}{\partial g_{rs}} \frac{\partial g_{rs}}{\partial \tau_{12}} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau_{12}} \right),$$

$$\frac{1}{16} \frac{\partial^2 t}{\partial v_2^2} = \frac{\pi i}{4} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_{22}} + \sum \frac{\partial t}{\partial g_{rs}} \frac{\partial g_{rs}}{\partial \tau_{22}} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau_{22}} \right).$$

Si moltiplichino queste equazioni per $P_3(\tau_{11})$, $P_3(\tau_{12})$, $P_3(\tau_{22})$ e si sommino, ed analogamente per P_4, P_5; rammentando le (3), si giunge alle

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 t}{\partial u_2^2} = Q_3(t), \qquad -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 t}{\partial u_1 \partial u_2} = Q_4(t), \qquad \frac{1}{4} \frac{\partial^2 t}{\partial u_1^2} = Q_5(t),$$

i quali valori sostituiti nelle equazioni (7) conducono alle tre equazioni differenziali del secondo ordine per la funzione t, corrispondenti alle tre superiori per la funzione ϑ.

La forma quadratica φ, nella quale si ponga $u_1 = -x_2$, $u_2 = x_1$, è un cova-

riante di f del secondo ordine e di primo grado. Si hanno infatti le

$$P_0(\varphi)=u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_2},\quad P_1(\varphi)=2\varphi+u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\quad P_2(\varphi)=-A_0u_2\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+6A_1\left(\varphi+u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right),$$

e per esse si vede tosto che, ponendo

$$t=e^{-\frac{1}{2}\varphi}y^{\frac{1}{2}}T,$$

i valori di $P_0(T)$, $P_1(T)$, $P_2(T)$ si deducono dalle (6) sostituendo T a t.

Sieno, come precedentemente, $k(x_1, x_2)$ il covariante biquadratico e di secondo grado di f, ed A l'invariante quadratico; posto

$$K_{11}=\frac{1}{3\cdot4}\frac{\partial^2k}{\partial x_1^2},\qquad K_{12}=\frac{1}{3\cdot4}\frac{\partial^2k}{\partial x_1\partial x_2},\qquad K_{22}=\frac{1}{3\cdot4}\frac{\partial^2k}{\partial x_2^2},$$

nelle quali siasi operata la sostituzione $x_1=u_2$, $x_2=-u_1$, si hanno per $P_3(\varphi)$, $P_4(\varphi)$, $P_5(\varphi)$ i seguenti valori:

$$P_3(\varphi)=6K_{11}+\frac{3}{5}Au_1^2+(15A_2u_1-3A_1u_2)\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+(3A_2u_2-A_3u_1)\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)^2,$$

$$P_4(\varphi)=12K_{12}+\frac{6}{5}Au_1u_2+(11A_3u_1-3A_2u_2)\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+(A_3u_2-3A_4u_1)\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}-\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2},$$

$$P_5(\varphi)=6K_{22}+\frac{3}{5}Au_2^2+(3A_4u_1-A_3u_2)\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}-3A_5u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2.$$

Ponendo a confronto queste equazioni colle corrispondenti per t (7), si giunge alle seguenti equazioni differenziali per la funzione T:

$$P_3(T)=\left(3K_{11}+\frac{3}{10}Au_1^2\right)T+(15A_2u_1-3A_1u_2)\frac{\partial T}{\partial u_1}+(3A_2u_2-A_3u_1)\frac{\partial T}{\partial u_2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2T}{\partial u_2^2},$$

$$P_4(T)=\left(6K_{12}+\frac{3}{5}Au_1u_2\right)T+(11A_3u_1-3A_2u_2)\frac{\partial T}{\partial u_1}+(A_3u_2-3A_4u_1)\frac{\partial T}{\partial u_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2T}{\partial u_1\partial u_2},$$

$$P_5(T)=\left(3K_{22}+\frac{3}{10}Au_2^2\right)T+(3A_4u_1-A_3u_2)\frac{\partial T}{\partial u_1}-3A_5u_1\frac{\partial T}{\partial u_2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2T}{\partial u_1^2}.$$

Le medesime, salvo lievi modificazioni, furono già trovate per altra via dal signor WILTHEISS *).

2 dicembre 1888.

---

*) WILTHEISS, *Ueber eine partielle Differentialgleichung der Thetafunctionen zweier Argumente und über die Reihenentwickelung derselben* [Mathematische Annalen, t. XXIX (1887), pp. 272-298].

CLII.

NOTIZIE SULLA VITA E SULLE OPERE DI GIORGIO ENRICO HALPHEN.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume V (1889, 1° sem.), pp. 815-823.

È appena trascorsa una settimana dal giorno in cui io riceveva da Versailles una lettera, colla data del 21 maggio, così concepita:

« *Monsieur le Président,*

« *J'ai la douleur de vous faire part du décès de mon bien-aimé gendre M.r le Comm.dant*
« HALPHEN *qui a succombé aujourd'hui à la suite d'une maladie contractée par l'excès de*
« *travail.*

« *Veuillez porter cette nouvelle à la connaissance des Membres de l'Académie et re-*
« *çevoir, Monsieur le Président, l'assurance de ma considération très-distinguée.*

« H. ARON ».

Nel parteciparvi, egregi Colleghi, l'infausto annunzio della morte dell'eminente analista, nostro Socio straniero dal 1887, permettetemi che io aggiunga alcune brevi notizie intorno la sua vita ed i suoi principali lavori. E queste vorrei che non solo valessero ad onorare la memoria dell'illustre Collega, ma benanco di manifestazione alla Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, nella quale egli aveva acquistato una posizione così cospicua, che l'Accademia nostra partecipa al suo lutto per la grave perdita.

Uno degli storici moderni di maggior fama, di cui il nome percorre oggi l'Europa e l'America, tanto è il fascino dell' opera sua, lo storico del popolo Inglese, il GREEN, in quella prefazione dedicata a definire il metodo da lui seguito nel suo lavoro,

così, concludendo, lo scolpisce: « Io ho posto, scrive il GREEN, SHAKSPEARE fra gli eroi « del secolo di ELISABETTA, e le investigazioni scientifiche della Società Reale al fianco « delle vittorie di CROMWELL » *).

È certamente invidiabile una nazione presso la quale la storia si concepisce e si scrive con programma così elevato, con tanta intiera coscienza dell'avvenire dell'umanità, e dove questo complesso di qualità vi è sì altamente apprezzato. Ma è a noi, a noi cultori delle scienze, che spetta principalmente il cómpito di porre in luce ed in sede sublime ogni manifestazione scientifica destinata a lasciare traccia di sè, è a noi che corre l'obbligo di rendere giusta lode agli uomini che ad esse portarono largo contributo, è nostro debito infine di onorare pei primi, se estinti, la loro cara memoria.

GIORGIO ENRICO HALPHEN nacque in Rouen il 30 ottobre 1844. Perduto il padre nella tenera età di quattro anni, fu, dopo poco tempo, condotto dalla madre a Parigi. Ivi fece gli studi classici nel liceo Saint-Louis ottenendovi, sia durante i corsi, quanto nel concorso generale, le più alte distinzioni. Ammesso alla Scuola politecnica nell'anno 1862, ben presto sviluppavasi in lui una tendenza naturale verso le scienze matematiche, e già nel secondo anno di corso la sua svegliatezza d'ingegno, la sua facilità di percezione, formavano l'ammirazione dei suoi maestri e dei suoi compagni.

Escendo dalla Scuola politecnica egli era aggregato all'arma di artiglieria, ed in essa, durante la guerra degli anni 1870-71 ed il secondo assedio di Parigi, diede prova sui campi di battaglia di tanta bravura da valergli la croce di Cavaliere della Legione d'onore. Pur continuando a far parte della Direzione generale dell'artiglieria, egli era nominato nell'anno 1873 Ripetitore d'analisi alla Scuola politecnica, e tenne questa posizione per quattordici anni, i tre ultimi nella qualità d'Esaminatore d'ammissione.

Nell'anno 1872 contrasse matrimonio colla signorina ARON, ed ebbe dal medesimo quattro figli e due figlie.

Rispetto alle qualità morali altamente pregevoli di HALPHEN, non saprei esprimerle con maggiore efficacia di quello che portando a vostra cognizione un brano della lettera che il sig. HENRI ARON, adjoint au Maire du 2ème Arrondt de Paris, suo suocero, dirigevami pochi giorni sono comunicandomi, dietro mia preghiera, le notizie espostevi fin qui. « Fils affectueux et tendre, scrive il sig. ARON, le meilleur des époux et des « pères, le plus noble et le plus chevaleresque des caractères, c'est un savant dont la « France s'honorait, un soldat valeureux, un homme d'une modestie parfaite, doux aux « faibles et à ses inférieurs, que pleurent sa famille inconsolable et ses nombreux amis ».

Nominato *Membre de l'Institut* nell'anno 1886 alla quasi unanimità dei suffragi,

*) « I have set SHAKSPEARE among the heroes of the Elisabethan age and placed the scientific « inquiries of the Royal Society side by side with the victories of the New Model ». JOHN RICHARD GREEN, *History of the English People*, First Edition (London, Macmillan, 1877), Preface.

era stato da quattro mesi promosso ad ufficiale della Legione d'onore, di recente scelto a Membro del Consiglio di perfezionamento della Scuola Politecnica, e doveva essere di questi giorni elevato al grado di Luogotenente Colonnello di Artiglieria.

Fin qui dell'uomo; permettetemi ora qualche maggiore diffusione parlando dello scienziato.

L'opera sua è tanto varia ed estesa, che non è facile il renderne conto in breve scritto. Già nell'anno 1885, allorquando l'Accademia delle Scienze conferiva a lui il premio Petit d'Ormoy per le scienze matematiche, il relatore della Commissione aggiudicatrice sig. JORDAN così la definiva: « L'œuvre de M.r HALPHEN est très considé« rable. Parmi les quatre-vingt-dix Mémoires dont elle se compose, plusieurs forment « de véritables volumes de 200 à 300 pages in-4°. Ils se distinguent par des qualités « de premier ordre: les questions traitées sont toujours importantes et difficiles; les « solutions, élégantes et rigoureuses, ne sont jamais abandonnées à moitié chemin; les « applications sont variées et intéressantes ».

Eppure quest'opera già così considerevole quattro anni ora sono, si è andata aumentando di non poco, dovendosi assegnare a quest'ultimo periodo quell'aureo *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, che sgraziatamente la morte gli impedì di portare a compimento *).

La nota caratteristica del progresso moderno degli studi matematici deve rintracciarsi nel contributo che ciascuna speciale teoria, quella delle funzioni, delle sostituzioni, delle forme, dei trascendenti, le geometriche e così via, porta nello studio di problemi pel quale in altri tempi forse una sola fra esse sembrava necessaria. È chiaro che questo moderno indirizzo scientifico esige una estesa coltura in chi può seguirlo, e che mentre un maggior numero di scienziati, pur valenti, possono perfezionare e far progredire alcuna fra le indicate teorie, è minore il numero di quelli che giungono a fare uso di esse a quello scopo complesso. La scuola di CLEBSCH ebbe molta parte nell'iniziare questo movimento, l'attuale di KLEIN vi ha dato notevole impulso ottenendo per questa via splendidi risultati.

La Francia, la quale dalle sciagure del 1870 seppe ritrarre nuova e potente vitalità scientifica, e ne ha dato ampie prove in ogni ramo dello scibile, non rimase estranea a quel movimento, e fra i promotori di esso, certamente non inferiore ad alcuno, fu HALPHEN.

Per raggruppare convenientemente i lavori di lui, parmi debbano distinguersi in cinque classi, quando si faccia eccezione di alcune memorie, sopra argomenti speciali,

*) *Au mépris des fatigues et du surmenage qui ont causé sa perte,* mi scriveva il sig. ARON, *il consacrait le jour à ses occupations militaires, et la nuit à l'ouvrage sur les fonctions elliptiques dont le 3me volume reste inachevé!*

alle quali accennerò più avanti. Questo raggruppamento è reso più facile dal metodo di lavoro adottato dall'autore e, direi meglio, da un evidente bisogno della sua mente. Allorquando un argomento si impossessava di questa, non rimaneva paga ai primi risultati ottenuti per quanto importanti, ma ritornava più volte sull'argomento stesso fino a penetrarlo da ogni lato.

Le cinque classi di lavori delle quali feci or ora cenno possono intitolarsi così:

1° lavori sui punti singolari delle curve algebriche piane;

2° lavori sulle caratteristiche dei sistemi di coniche e delle superficie del secondo ordine;

3° lavori sulla enumerazione e sulla classificazione delle curve algebriche nello spazio;

4° lavori intorno la teoria degli invarianti differenziali, ed applicazioni di essa a questioni geometriche e principalmente allo studio delle equazioni differenziali lineari;

5° lavori sopra le funzioni ellittiche.

La Memoria: *Sur les points singuliers des courbes algébriques planes,* fu presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi nella seduta del 20 aprile 1874 ed un estratto della medesima leggesi nei *Comptes-Rendus* di quella adunanza *). Nell'adunanza dell'11 gennaio dell'anno seguente una Commissione composta dei signori BERTRAND, BONNET, DE LA GOURNERIE formulava il suo giudizio a un di presso nei seguenti termini. *Il metodo impiegato dal signor* HALPHEN *nella sua Memoria consiste nello sviluppare l'equazione della curva e delle sue derivate (polari, hessiana, ecc.) conservando puramente i termini che possono avere influenza sulla questione da lui propostasi. Il teorema sulla somma degli ordini dei segmenti dà per questa via, in molti casi, una soluzione immediata. Sotto il rapporto analitico, le principali difficoltà che l'autore ha dovuto risolvere consistono nel riconoscere gli ordini di grandezza dei differenti termini di uno sviluppo nelle diverse ipotesi che possono essere fatte, nel classificare metodicamente i risultati e nell' esprimerli per formole speciali. In queste delicate ricerche,* notano i Commissari, *il sig.* HALPHEN *ha dato prova della più grande sagacità.* La Memoria dietro deliberazione dell' Accademia fu pubblicata fra le « Mémoires présentés par divers savants à l' Académie des Sciences » **).

Due altri importanti scritti di HALPHEN relativi alla stessa specie di ricerche si leggono nel « Journal de Mathématiques », ed hanno per titolo, il primo: *Sur une série de courbes, analogues aux développées;* l'altro: *Sur la recherche des points d'une*

*) [t. LXXVIII (1874), pp. 1105-1108].

**) [t. XXVI (1879), n° 2, pp. 1-112].

courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace *).

Un ultimo lavoro infine, che ha stretto legame coi precedenti, è la bella Memoria pubblicata nel quindicesimo volume dei « Mathematische Annalen » col titolo: *Recherches sur les courbes planes du troisième degré* **).

Anche sul tema dei lavori della seconda classe HALPHEN ritornò più volte. Il lavoro più completo sembrami quello pubblicato nel « Journal de l'École Politechnique », nel quale risolve questa importante quistione: *Parmi les coniques dont l'ensemble constitue un système donné, quel est le nombre de celles qui satisfont à une condition donnée?* ***).

È noto che JONQUIÈRES e CHASLES si erano già occupati della medesima ed avevano dato ciascuno una soluzione. Vari eminenti geometri avevano anche tentato di dare una dimostrazione alla soluzione di CHASLES, la quale invero non era fondata che sopra una induzione; fu HALPHEN che con uno studio più approfondito di essa, dimostrava che il teorema di CHASLES è soggetto a restrizioni da lui precisate, e stabiliva così le formule esatte, che risolvono completamente la quistione.

Il primo annuncio di questi risultati era però già dato in precedenza da HALPHEN in una sua comunicazione all'Accademia delle Scienze del 4 settembre 1876 ****), ed altri lavori suoi sull'argomento si trovano nei « Proceedings » della Società Matematica di Londra e nei « Mathematische Annalen » †).

Una prima Memoria relativa alla teoria *des courbes gauches algébriques,* fu presentata da HALPHEN all'Accademia delle Scienze fino dal febbraio 1870 ††) e dodici anni dopo, cioè nel 1882, la sua grande Memoria sulla classificazione di quelle curve, nella quale era in gran parte riprodotto il lavoro giovanile, fu giudicata, dalla Accademia delle Scienze di Berlino, meritevole del premio STEINER †††).

La brevità del tempo non mi concede di entrare in maggiori particolari sopra

---

*) [3ᵉ série, t. II (1876), pp. 87-144; e Ibid., pp. 257-290, 371-408].

**) [t. XV (1879), pp. 359-379].

***) *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* [Journal de l'École Polytechnique, Cahier XLV (1878), pp. 27-89].

****) *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXIII (1876), pp. 537-539].

†) *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques* [Proceedings of the London Mathematical Society, t. IX (1877-78), pp. 149-170; Mathematische Annalen, t. XV (1879), pp. 16-38].

††) *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (Extrait) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXX (1870), pp. 380-382].

†††) *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* [Journal de l'École Polytechnique, Cahier LII (1882), pp. 1-200].

questo classico lavoro, tanto più che gli scritti di HALPHEN compresi nella quarta classe sono i più estesi e forse i più originali.

Per quanto si incontri già traccia di queste ricerche in una delle Memorie citate sopra *), pure può dirsi che esse prendano origine dalla Tesi da lui presentata nel 1878 per ottenere il grado di dottore nelle scienze matematiche, la quale porta il titolo: *Sur les invariants différentiels* **). Le prime parole della medesima, che io qui testualmente riproduco, mostrano chiaramente lo scopo, l'estensione e l'importanza della ricerca: *Parmi les équations différentielles qui s'offrent dans les applications usuelles de l'Analyse à la Géométrie plane, il en est qui se reproduisent sans altération quand on effectue sur les variables une substitution homographique quelconque: telles sont les équations différentielles, en coordonnées rectilignes, des lignes droites, des coniques, etc. Je nomme invariant différentiel le premier membre d'une telle équation. C'est la Géométrie qui fournit ainsi les premiers exemples d'invariants différentiels; c'est à l'Algèbre qu'il appartient d'en coordonner la théorie par la résolution de ce problème: « former, sans en omettre aucun, les invariants différentiels de chaque ordre ». Résoudre cette question, tel est l'objet de cette Thèse.*

Le proprietà degli enti matematici, figure o formole analitiche, osserva giustamente il signor JORDAN nell'esaminare questa tesi e gli altri scritti di HALPHEN alla medesima connessi, sono di due sorta: le une individuali, le altre comuni a tutti gli enti di una stessa famiglia. Lo studio sistematico di questi ultimi costituisce la teoria degli invarianti, la quale ha rinnovellato l'algebra e la geometria analitica; ma nulla di simile era ancora stato fatto per il calcolo differenziale e per l'integrale.

Mi limiterò a citare una prima pubblicazione successiva alla tesi, quella che ha per titolo: *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* ***), nella quale il concetto e l'uso dell'invariante differenziale appaiono ancora più chiari che nella tesi, per estendermi maggiormente sulla Memoria: *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables,* premiata nell'anno 1880 dall'Accademia delle scienze dell'Istituto di Francia ****).

L'Accademia aveva per quell'anno posto a concorso la seguente quistione: *Perfezionare in qualche punto importante la teoria delle equazioni differenziali lineari ad una sola variabile indipendente.* Il tema era stato nel momento così opportunamente scelto, che sopra sei concorrenti, il relatore della commissione, il sig. HERMITE, quattro ne additava, di cui i lavori rendevano testimonianza della estesa coltura, e dello spirito in-

*) [Journal de Mathématiques, 3e série, t. II (1876)].

**) [Paris, Gauthier-Villars, 1878].

***) [Journal de l'École Polytechique, Cahier XLVII (1880), pp. 1-102].

****) [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, t. XXVIII (1883)].

dagatore dei loro autori. È in questo bellissimo lavoro, il quale, come osservava l'illustre geometra che ho nominato, dimostra nel suo autore un talento matematico dell'ordine più elevato, che si trovano introdotti in ricerche di calcolo integrale le nozioni algebriche di invarianti, e da queste nuove combinazioni sono posti in luce gli elementi nascosti dai quali dipende, sotto le sue diverse forme analitiche, la integrazione di una data equazione. L'idea di estendere il concetto di invariante alle equazioni differenziali era già stata intraveduta da altri, ma nessuno prima di HALPHEN aveva fecondata quell'idea in uno studio sistematico delle equazioni differenziali.

Nè le conseguenze di quelle prime ricerche si arrestano alla Memoria premiata, giacchè le due interessanti Memorie: *Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires*, presentata all'Accademia nel 1883 e nel 1884 *), l'altra: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre,* pubblicata negli « Acta mathematica » di Stocolma **), l'altra ancora: *Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre* che leggesi nei « Mathematische Annalen » ***) appartengono al medesimo ordine.

Ed ancora più avanti egli progrediva per questa feconda via nella sua Memoria inserita nel « Journal de Mathématiques » del 1885, che porta il modesto titolo: *Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires* †), ma di cui lo scopo così da lui definito: *Se fra le diverse soluzioni di una stessa equazione differenziale lineare, soluzioni incognite, esiste una relazione conosciuta, quale profitto si potrà trarre da essa per la integrazione?* dinota tosto l'importanza e la difficoltà della quistione considerata nel lavoro.

Una eccezione la quale sfugge al metodo seguito nella Memoria stessa, eccezione indicatavi dall'Autore, il caso cioè in cui la funzione delle soluzioni della equazione differenziale, supposta nota, sia una forma quadratica a coefficienti costanti, indusse HALPHEN a ritornare sopra l'argomento in una comunicazione all'Accademia delle Scienze nella seduta del 5 ottobre 1885 ††).

Altri lavori suoi relativi alle equazioni differenziali lineari mi sarebbe facile il citare per la conoscenza completa che ho dei medesimi, ma quanto esposi fin qui è già sufficiente a concludere che, se HALPHEN nelle prime due serie o classi di scritti ha portato a

---

*) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XCVII (1883), pp. 1408-1411, 1541-1544, t. XCVIII (1884), pp. 134-136].

**) [t. III (1883), pp. 325-380].

***) [t. XXIV (1884), pp. 461-464].

†) [4ᵉ série, t. I (1885), pp. 11-85].

††) *Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CI (1885), pp. 664-666].

compimento due teorie poco più che abbozzate, colle altre due fu iniziatore e creatore di nuove teorie.

Eppure l'opera sua oltrepassa ancora questo già esteso campo di attività. E l'oltrepassa in quella forma che d'ordinario presenta maggiori difficoltà allo scienziato, il quale possiede le qualità inventive d'HALPHEN : quella di scrivere un libro od un trattato.

Il *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications,* di cui il primo volume apparve nel 1886, il secondo nel 1888, ed il terzo, come già dissi, rimase incompiuto per l'infausta morte, ha qualità didattiche di primo ordine, per la perfetta conoscenza della materia, per la esattezza scrupolosa delle dimostrazioni, per la precisione della forma. Ma non basta; in una disciplina pur già abbastanza nota ai geometri egli seppe introdurvi una nota tutta sua, originale, sicchè scorrendo quel libro appare tosto, se non lo si sapesse, che esso fu scritto da HALPHEN.

Nel dominio delle Matematiche, osserva giustamente l'Autore nella prefazione al primo volume, si possono distinguere due parti: l'una la più elevata, che si aumenta di continuo, quasi sempre per gradi insensibili, non riguarda che i matematici; l'altra, lungamente immutabile, si accresce bruscamente ad intervalli lontani; questa è la materia dell'insegnamento, è ciò che devono sapere applicare tutti gli uomini che si dedicano alle scienze esatte e, senza coltivare le matematiche, hanno bisogno di conoscere. In quale di queste due parti devesi oggi comprendere la teorica delle funzioni ellittiche? Essa insegnasi dovunque, ma solo i matematici sanno servirsene. Essa traversa, a quanto appare, un periodo di transizione. È nella speranza di accelerare la fine di questo periodo che ho intrapreso il mio lavoro.

Già in precedenza della pubblicazione del Trattato aveva HALPHEN dimostrato di avere studiati con cura i lavori di WEIERSTRASS, di SCHWARZ, e d'altri geometri della Germania, nelle sue Memorie presentate all' Accademia delle Scienze di Parigi nelle adunanze dei 3, 17 e 31 marzo 1879 *); e nella *Note sur l'inversion des intégrales elliptiques,* inserita nel « Journal de l'École Polytechnique » **) ed in qualche altra, relative a problemi di meccanica razionale. Fu con questa preparazione che egli si accinse alla difficile intrapresa di scrivere il libro; il successo ha dimostrato possedere egli pure da questo lato le qualità necessarie.

Dissi da principio che anche all'infuori delle cinque classi, nelle quali può raggrupparsi l'opera principale di HALPHEN, esistono molte ed importanti Memorie sue

*) *Sur la multiplication des fonctions elliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXVIII (1879), pp. 414-417]. — *Sur l'intégration d'une équation différentielle* [Ibid., pp. 562-565].—*Sur deux équations aux dérivées partielles, relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques* [Ibid., pp. 698-701].

**) [Cahier LIV (1884), pp. 171-181].

sopra argomenti speciali. Mi limiterò a citare quella che egli presentava all'Accademia delle Scienze, all'età circa di ventitre anni, col titolo: *Sur le caractère biquadratique du nombre 2* *), perchè da essa appaiono già fin d'allora a lui famigliari i classici lavori di GAUSS e di JACOBI sull'argomento; e saltando a piè pari, sebbene a malincuore, un trentennio di vita laboriosa, rammenterò i due ultimi suoi lavori apparsi nell'anno in corso.

Il primo di essi pubblicato nel « Journal de Mathématiques » **) è relativo alla moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche. Come è noto, la moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche fu una delle più belle scoperte di ABEL, sviluppata ed estesa da due illustri geometri viventi, i signori KRONECKER e HERMITE. È a questi ultimi matematici che devesi la scoperta dello stretto legame esistente fra la moltiplicazione complessa e la teoria delle forme aritmetiche di GAUSS. Altri geometri, i signori STUART, SYLOW, il P. JOUBERT, WEBER, PYCK, GREENHILL, continuarono più di recente con profitto questo genere di ricerche; e le medesime non potevano sfuggire ad HALPHEN, che di esse intendeva occuparsi nel terzo volume del suo trattato.

Au point de vue des résultats, così egli modestamente giudica questo suo penultimo lavoro, *c'est donc un complément que j'apporte à ce qui était acquis. Mais c'est surtout par la méthode employée, que ce travail, sans prétention, mérite peut-être un instant d'attention.*

Infine ancora l'undici marzo ora scorso, egli presentava all'Accademia delle Scienze di Parigi una breve Nota: *Sur la résolvante de* GALOIS *dans la division des périodes elliptiques par 7* ***), nella quale dimostrava di avere già approfondito un altro dei difficili argomenti che dovevano trovar posto nel terzo volume. Fu a proposito di quest'ultimo lavoro che io ebbi uno scambio di lettere con lui, e da questa pur troppo breve corrispondenza l'ammirazione per lo scienziato si accrebbe di quella per l'uomo.

L'opera di GIORGIO ENRICO HALPHEN, egregi Colleghi, per quanto interrotta da una morte prematura, farà vivere il suo nome nella storia delle matematiche, nella storia della scienza. Possa questa fiducia, possa questo mio breve ricordo, portare qualche conforto alla vedova, alla famiglia sua, desolate per tanto grave perdita.

2 giugno 1889.

---

*) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVI (1868), pp. 190-193].

**) *Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par* $\sqrt{-23}$ [Journal de Mathématiques, 4e serie, t. V (1889), pp. 5-52].

***) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CVIII (1889), pp. 476-477].

CLIII.

COMMEMORAZIONE DI GILBERTO GOVI *).

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume V (1889, 2° sem.), pp. 29-31.

La mestizia, che è profonda nell'animo nostro e traspare dai nostri volti, rende manifesto, Signori, ancora più che la parola, trovarci innanzi la salma di un uomo, di cui le qualità morali ed intellettuali erano grandemente apprezzate.

GILBERTO GOVI fu il tipo dello scienziato; può dirsi in fatti di lui che nessuna parte della sua laboriosa esistenza fu sottratta alla scienza. Un breve momento, per sollecitazione di amici, parvegli poter servire il proprio paese anche in altra sfera d'azione; ma ben presto se ne ritrasse, accortosi della difficoltà di attendere agli studi col medesimo ardore, e fors'anco per convinzioni che parevano poter contraddire a quella nuova posizione.

Di GILBERTO GOVI, considerando l'uomo, può ripetersi quanto diceva non ha guari un illustre scrittore francese, suo amico: « *Ne point affirmer, ne pas nier, ne pas* « *douter, cet état étrange est celui de beaucoup d'hommes aujourd'hui* ».

Ma il mio breve ricordo non ha in mira che lo scienziato, anzi appena alcune tendenze sue, lasciando ad altri, ed in sede più adatta, il rammentare l'intera opera sua.

L'amore alle ricerche storiche nel campo delle scienze naturali può dirsi quasi innato nel GOVI, fattosi di certo manifesto nei suoi anni giovanili. La serie non interrotta di queste sue ricerche acquistavagli grande riputazione all'estero e nel nostro paese, sicchè io rammento che, trovandomi con lui a Parigi molti anni sono, lo vedeva ap-

*) [Discorso pronunziato da F. BRIOSCHI, quale Presidente della R. Accademia dei Lincei, ai funerali del socio GILBERTO GOVI, morto improvvisamente in Roma il 29 giugno 1889].

prezzato e richiesto di consigli dagli uomini più noti in questo genere di studi. In Italia, se l'amicizia non turba il mio giudizio, credo che nessuno dei viventi abbia dato maggiori prove di lui di saper congiungere la cognizione scientifica e la critica storica.

I suoi più recenti lavori: *Du cercle chromatique de* NEWTON *); *Il microscopio composto inventato da* GALILEO **); *Come veramente si chiamasse il* VESPUCCI, *e se dal nome di lui sia venuto quello del Nuovo Mondo* ***); *Di un precursore italiano del* FRANKLIN †); *Intorno all'origine della parola « Calamita », usata in Italia per indicare la Pietra Magnete* ††); infine: *La Ragione del Martilogio, ossia il metodo adoperato dai Navigatori del secolo XV per calcolare i loro viaggi in mare* †††) pubblicati tutti, ad eccezione dei due primi, in questi ultimi venti mesi negli Atti dell'Accademia dei Lincei; per la varietà degli argomenti, per la importanza loro, accrebbero la sua fama; ed ancora poche settimane or sono egli poteva compiacersi nel vedere la sua opinione, rispetto al nome del VESPUCCI, accolta dai più autorevoli diari dedicati a ricerche geografico-storiche.

Eppure questa non breve serie di scritti non dà intera la misura della sua febbrile attività.

Quasi ogni giorno, da tre anni all'incirca, egli consacrava alcune ore ad effettuare quel nobile disegno che era stato il più ardente desiderio della sua anima di italiano e di scienziato, la pubblicazione del *Codice Atlantico* di LEONARDO DA VINCI; di quell'opera, la quale, come luminosamente scriveva CESARE CORRENTI, deve ridare all'Italia innovata e integrata l'immagine della mente del gran precursore della scienza sperimentale.

Tutti conoscono le gravi difficoltà, che presenta la lettura e la interpretazione degli scritti del VINCI. Ma il GOVI, il quale, negli anni di esiglio, si era in Parigi fatto praticissimo della scrittura e della dottrina di LEONARDO, studiandovi quei manoscritti che dalla Biblioteca Ambrosiana di Milano erano stati mandati colà come trofeo di conquista, ed ora si stanno pubblicando per cura del Sig. RAVAISSON; il GOVI, che

---

*) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CV (1887), pp. 733-737].

**) [Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, serie II, vol. II (1888). Memoria n° 1 di pag. 33; vedi anche Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, vol. IV (1888, 1° sem.), pp. 564-565].

***) [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, vol. IV (1888, 2° sem.), pp. 297-301].

†) [Ibid., serie IV, vol. V (1889, 1° sem.), pp. 138-142].

††) [Ibid., serie IV, vol. V (1889, 1° sem.), pp. 394-403].

†††) [Di questo lavoro vi è solo l'annunzio e il sunto nei Rendiconti citati, serie IV, volume V (1889, 1° sem), (pp. 625-626). Esso dovea esser inserito nei volumi delle Memorie, ma non se ne trova più traccia. Nel medesimo volume dei Rendiconti (pp. 749-750) vi è la presentazione di un altro documento sul medesimo soggetto].

nell'anno 1872 in occasione del monumento eretto in Milano a ricordare LEONARDO DA VINCI e i suoi scolari lombardi, pubblicava un saggio di quel Codice Atlantico *); il GOVI anelava di poter portare a compimento questo lavoro. Gli aiuti di S. M. il Re, dell'ordine Mauriziano, dei Ministeri, resero possibile all'Accademia l'assumere la direzione dell'opera, affidandola alla indiscutibile competenza di GILBERTO GOVI.

Povero amico mio, ancora pochi giorni, e questo sogno della tua giovinezza poteva divenire una realtà! Quale tristezza rileggendo ora quelle tue pagine! Tu mi hai dato per oltre quaranta anni le più sicure prove di una amicizia leale e sincera; tu fosti caro ai miei più cari; qui innanzi alla tua tomba prometto che l'opera tua non rimarrà incompiuta.

*) [*Saggio delle opere di* LEONARDO DA VINCI, con 24 tavole fotolitografiche di scritture e disegni tratti dal Codice Atlantico. Milano, 1872. — Il GOVI vi pubblicò la parte intitolata: *Il genio di* LEONARDO, LEONARDO *letterato e scienziato*, pp. 5-22].

CLIV.

SULLO SVILUPPO IN SERIE DELLE FUNZIONI SIGMA IPERELLITTICHE.

Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume VI (1890), pp. 471-484.

1. Sia

$$f(x) = A_0 x^n + n A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = A_0 \prod_m (x - a_m),$$

nella quale $n = 2(\rho + 1)$, il polinomio sotto il segno radicale nell'integrale normale iperellittico. È noto, pei lavori del prof. KLEIN, che le 4^ρ funzioni sigma si distinguono nel modo seguente.

Posto

$$\varphi(x) = \alpha_0 x^{\rho+1-2\mu} + (\rho + 1 - 2\mu)\alpha_1 x^{\rho-2\mu} + \cdots + \alpha_{\rho+1-2\mu},$$
$$\psi(x) = \beta_0 x^{\rho+1+2\mu} + (\rho + 1 + 2\mu)\beta_1 x^{\rho+2\mu} + \cdots + \beta_{\rho+1+2\mu},$$
$$f(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

quelle 4^ρ funzioni si ottengono ponendo $\mu = 0, 1, 2, \ldots \frac{\rho}{2}$ oppure $\frac{\rho+1}{2}$ secondo che ρ è pari o dispari.

È noto altresì per gli stessi lavori del prof. KLEIN *) che i vari termini dello sviluppo in serie di ciascuna di quelle funzioni sigma sono covarianti simultanei delle

*) KLEIN, *Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen* [Mathematische Annalen, t. XXVII (1886), pp. 431-464; t. XXXII (1888), pp. 351-380].—BURKHARDT, *Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen* [Mathematische Annalen, t. XXXII (1888), pp. 381-442].

due forme

$$\varphi(x_1, x_2), \quad \psi(x_1, x_2)$$

corrispondenti alla funzione sigma che si considera, e ad una terza forma

$$u = u_\rho x_1^{\rho-1} - (\rho - 1) u_{\rho-1} x_1^{\rho-2} x_2 + \cdots + (-1)^{\rho-1} u_1 x_2^{\rho-1},$$

$u_1, u_2, \ldots u_\rho$ essendo gli ordinari argomenti di una funzione theta iperellittica.

Il prof. WILTHEISS ha dato, nei volumi XXXI e XXXIII dei « Mathematische Annalen » *), le equazioni differenziali generali alle quali soddisfano quelle funzioni sigma, ed è giovandosi di queste che nei casi di $\rho = 1$, $\rho = 2$ si ottenne lo sviluppo in serie delle corrispondenti funzioni sigma.

La formola generale del sig. WILTHEISS è la seguente:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum v^{2\rho-\alpha-\beta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \sum k_{\alpha\beta} u_\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial u_\beta} + \frac{1}{2} \sigma \sum l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \\ & + n[\delta(\sigma) + \sigma D^{-1} \delta(D)] = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \rho) \end{aligned} \right.$$

nella quale

$$D = D_\varphi^{\frac{1}{8}} D_\psi^{\frac{1}{8}},$$

e D_φ, D_ψ sono i discriminanti delle due forme φ, ψ corrispondenti a quella σ. Il simbolo di operazione δ, denominato procedimento di ARONHOLD, si definisce così. Sia

$$g(x) = f_{111}(v) x^3 + 3 f_{112}(v) x^2 + 3 f_{122}(v) x + f_{222}(v),$$

nella quale $f_{111}(v)$, $f_{112}(v)$, ... sono le derivate terze di $f(v_1, v_2)$ divise per $n(n-1)(n-2)$; e pongasi

$$F(x) = \frac{g_1 f_2 - g_2 f_1}{x - v},$$

essendo $f_1 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $g_1 = \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial x_1}$, ... La funzione $F(x)$ sarà del grado n in x. Ponendo

$$F(x) = F_0 x^n + n F_1 x^{n-1} + \cdots + F_n,$$

il simbolo δ rappresenta la seguente operazione:

$$\delta V = F_0 \frac{\partial V}{\partial A_0} + F_1 \frac{\partial V}{\partial A_1} + \cdots + F_n \frac{\partial V}{\partial A_n},$$

ed in essa $F_0(v_1, v_2)$, $F_1(v_1, v_2)$, ... sono forme dell'ordine $n - 4$.

*) WILTHEISS, *Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen* [Mathematische Annalen, t. XXXI (1888), pp. 134-155; t. XXXIII (1889), pp. 267-290].

I coefficienti dei covarianti simultanei termini della serie di una sigma, ad eccezione del caso in cui $2\mu = \rho + 1$, essendo funzioni di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots ; \beta_0, \beta_1, \ldots$ è d'uopo considerare l'operazione δ rispetto alla φ ed alla ψ.

Il sig. WILTHEISS ha dimostrato che, ponendo

$$(2)\quad \begin{cases} n^2(x-v)\,\Phi(x) = (\rho+1-2\mu)[n(g_1\varphi_2 - g_2\varphi_1) + (\rho+1+2\mu)\varphi(x)(x\gamma_1+\gamma_2)], \\ n^2(x-v)\,\Psi(x) = (\rho+1+2\mu)[n(g_1\psi_2 - g_2\psi_1) - (\rho+1-2\mu)\psi(x)(x\gamma_1+\gamma_2)], \end{cases}$$

nelle quali γ è la funzione di v dell'ordine 2ρ

$$\gamma = (\varphi\psi),$$

e γ_1, γ_2 sono le derivate di essa rispetto a v_1, v_2 divise per 2ρ; posto

$$\Phi(x) = \Phi_0 x^{\rho+1-2\mu} + (\rho+1-2\mu)\Phi_1 x^{\rho-2\mu} + \cdots,$$

$$\Psi(x) = \Psi_0 x^{\rho+1+2\mu} + (\rho+1+2\mu)\Psi_1 x^{\rho+2\mu} + \cdots,$$

$$\delta_\varphi V = \Phi_0 \frac{\partial V}{\partial \alpha_0} + \Phi_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} + \cdots,$$

$$\delta_\psi V = \Psi_0 \frac{\partial V}{\partial \beta_0} + \Psi_1 \frac{\partial V}{\partial \beta_1} + \cdots,$$

si ha:

$$\delta V = \delta_\varphi V + \delta_\psi V.$$

2. Le operazioni δ_φ, δ_ψ si possono opportunamente trasformare, sostituendo alle derivate rispetto ai coefficienti quelle rispetto alle radici a_r della equazione $\varphi = 0$ ed a_s della $\psi = 0$. Si ottengono così le formole:

$$n\delta_\varphi V = -\sum_r \frac{g(a_r)}{v-a_r}\frac{\partial V}{\partial a_r} + \frac{np}{\alpha_0}\Phi_0 V,$$

$$n\delta_\psi V = -\sum_s \frac{g(a_s)}{v-a_s}\frac{\partial V}{\partial a_s} + \frac{nq}{\beta_0}\Psi_0 V,$$

essendo p, q i gradi di V rispetto ai coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ ed ai coefficienti $\beta_0, \beta_1, \ldots$.

Ora, essendo

$$\frac{\partial D_\varphi}{\partial a_r} = D_\varphi \frac{\varphi''(a_r)}{\varphi'(a_r)}, \qquad \frac{\partial D_\psi}{\partial a_s} = D_\psi \frac{\psi''(a_s)}{\psi'(a_s)},$$

si ottiene la

$$nD^{-1}\delta_\varphi D = -\frac{1}{8}\sum_r \frac{g(a_r)\varphi''(a_r)}{(v-a_r)\varphi'(a_r)} + \frac{1}{4}\frac{n(\rho-2\mu)}{\alpha_0}\Phi_0,$$

ed analogamente per $\delta_\psi D$.

Da queste si deducono le

$$nD^{-1}\delta_\varphi D = \frac{1}{8}(\rho + 1 - 2\mu)(\rho - 2\mu)\left(\frac{\rho + 1 + 2\mu}{\rho + 1}\gamma_1 - \psi\varphi_{11} + f_{11}\right),$$

$$nD^{-1}\delta_\psi D = \frac{1}{8}(\rho + 1 + 2\mu)(\rho + 2\mu)\left(-\frac{\rho + 1 - 2\mu}{\rho + 1}\gamma_1 - \varphi\psi_{11} + f_{11}\right),$$

e ponendo in queste per f_{11}, γ_1 i loro valori in φ, ψ:

$$nD^{-1}\delta_\varphi D = -\frac{1}{16}\frac{[(\rho+1)^2 - 4\mu^2][\rho^2 - 4\mu^2]}{\rho(2\rho+1)}(\varphi\psi)_2,$$

ed identicamente per $\delta_\psi D$; per ciò:

$$(3) \qquad nD^{-1}\delta D = -\frac{1}{8}\frac{[(\rho+1)^2 - 4\mu^2][\rho^2 - 4\mu^2]}{\rho(2\rho+1)}(\varphi\psi)_2;$$

si ha così il teorema:

Il valore di $\frac{1}{D}\delta D$ *è eguale a zero pei due casi di* $2\mu = \rho + 1$, $2\mu = \rho$; *in tutti gli altri è eguale al covariante simultaneo* $(\varphi\psi)_2$ *moltiplicato per un coefficiente numerico.*

3. Supponiamo lo sviluppo in serie di una funzione sigma rappresentato dalla

$$\sigma = L + M + N + \cdots.$$

Risulta dalla equazione differenziale (1) che, se L è del grado $m - 2$ rispetto alle $u_1, u_2, \ldots u_\rho$, sarà M del grado m, N del grado $m + 2$ e così di seguito. Inoltre dalla stessa equazione differenziale si dedurranno le

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{4}\sum v^{2\rho-\alpha-\beta}\frac{\partial^2 M}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \sum k_{\alpha\beta}u_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_\beta} + n[\delta(L) + LD^{-1}\delta(D)] = 0, \\ \frac{1}{4}\sum v^{2\rho-\alpha-\beta}\frac{\partial^2 N}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \sum k_{\alpha\beta}u_\alpha \frac{\partial M}{\partial u_\beta} + \frac{1}{2}L\sum l_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta \\ \qquad + n[\delta(M) + MD^{-1}\delta(D)] = 0, \end{cases}$$

la quale ultima sussiste per tre qualsivogliano termini consecutivi della serie.

Il prof. Klein, nel secondo dei lavori sopra citati, ha dato una espressione generale pel primo termine L della serie per ciascuna funzione sigma.

Pel caso in cui $\mu = 0$, e quindi le φ, ψ sono ciascuna del grado $\rho + 1$, essendo

$L = 1$, la prima delle (4) e la (3) dànno:

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\sum v^{2\rho-\alpha-\beta}\frac{\partial^2 M}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \frac{1}{4}\frac{\rho(\rho+1)^2}{2\rho+1}(\varphi\psi)_2 .$$

Il secondo termine della serie, M, deve in questo caso, per quanto si è osservato più addietro, essere un covariante simultaneo delle tre forme $\varphi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$, $u(x_1, x_2)$ del grado secondo rispetto alle $u_1, u_2, \dots u_\rho$. Posto

$$b = \varphi_{11}\psi_{22} - 2\varphi_{12}\psi_{12} + \varphi_{22}\psi_{11},$$

dove le derivate sono prese rispetto ad x, la espressione

$$(bu^2)_{2\rho-2} = b(u_1, u_2, \cdots u_\rho)$$

soddisfa a quelle condizioni.

Ora quest'ultima si ottiene dalla $(\varphi\psi)_2$ superiore ponendo in essa in luogo delle $v^{2\rho-2}, v^{2\rho-3}, \dots v, 1$ i coefficienti di $x_2^{2\rho-2}, -x_2^{2\rho-3}x_1, \dots -x_2 x_1^{2\rho-3}, x_1^{2\rho-2}$ divisi pei corrispondenti coefficienti numerici in u^2; ossia

$$u_1^2,\ u_1 u_2,\ \frac{1}{2\rho-3}[(\rho-1)u_2^2 + (\rho-2)u_1 u_3],\ \cdots u_{\rho-1}u_\rho,\ u_\rho^2 .$$

Per questa sostituzione nella ipotesi di $\rho = 2$ il primo membro della equazione (5) diventa eguale ad M e si ha, come è noto:

$$M = \tfrac{9}{10} b(u_1, u_2).$$

La stessa proprietà si verifica per ρ qualsivoglia. Sia per esempio $\rho = 4$, essendo $b = b_0 x_1^6 + 6 b_1 x_1^5 x_2 + \dots$, si avrà:

$$\begin{aligned}(bu^2)_6 &= b(u_1, u_2, u_3, u_4)\\ &= b_0 u_1^2 + 6b_1 u_1 u_2 + 3b_2(2u_1u_3 + 3u_2^2) + 2b_3(u_1u_4 + 9u_2u_3)\\ &\quad + 3b_4(2u_2u_4 + 3u_3^2) + 6b_5 u_3 u_4 + b_6 u_4^2,\end{aligned}$$

ed il primo membro della (5) per la stessa sostituzione diventa:

$$M + \frac{1}{5}\left[v_2\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_2^2} - 3\frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_3}\right) + v_1\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_2 \partial u_3} - 9\frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_4}\right) + v_0\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u_3^2} - 3\frac{\partial^2 M}{\partial u_2 \partial u_4}\right)\right],$$

essendo

$$v_2 = u_1 u_3 - u_2^2, \qquad 2v_1 = u_1 u_4 - u_2 u_3, \qquad v_0 = u_2 u_4 - u_3^2,$$

i coefficienti di $v = \frac{1}{2}(uu)_2$. Ma pel valore superiore di b:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial u_2^2} = 3\frac{\partial^2 b}{\partial u_1 \partial u_2}, \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial u_2 \partial u_3} = 9\frac{\partial^2 b}{\partial u_1 \partial u_4}, \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial u_3^2} = 3\frac{\partial^2 b}{\partial u_2 \partial u_4},$$

e siccome vedesi facilmente che questa proprietà ha luogo per ρ qualunque, si giunge al teorema:

Il secondo termine M della serie di ciascuna funzione sigma corrispondente a $\mu = 0$ è il seguente:

$$M = \frac{1}{4}\frac{\rho(\rho+1)^2}{2\rho+1} b(u_1, u_2, \cdots u_\rho). \tag{6}$$

4. Determinato in generale il valore di $\delta(D)$, si ha dalle equazioni (4) che per un termine V qualsivoglia dello sviluppo in serie di una delle sigma devono determinarsi i valori di

$$\delta(V), \qquad \sum k_{\alpha\beta} u_\alpha \frac{\partial V}{\partial u_\beta} = K(V),$$

ed il valore di

$$\sum l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \Lambda.$$

Dedichiamo questo paragrafo alla ricerca del valore di $\delta(V)$, escludendo i casi di $2\mu = \rho + 1$, $2\mu = \rho$, i quali devono considerarsi a parte.

V, come si è osservato sopra, è un covariante simultaneo delle forme φ, ψ, u, o meglio un invariante di covarianti simultanei delle forme φ, ψ e della forma u. Devesi quindi dapprima determinare il valore di V in funzione di covarianti, od invarianti, simultanei delle forme φ, ψ.

Posto per brevità:

$$\lambda = \rho + 1 - 2\mu, \qquad l = \rho + 1 + 2\mu,$$

$$\varphi_0 = \varphi, \qquad \varphi_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{d\varphi}{dv}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}\frac{d^2\varphi}{dv^2}, \qquad \cdots$$

$$\psi_0 = \psi, \qquad \psi_1 = \frac{1}{l}\frac{d\psi}{dv}, \qquad \psi_2 = \frac{1}{l(l-1)}\frac{d^2\psi}{dv^2}, \qquad \cdots$$

sarà V una funzione di $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \psi_0, \psi_1, \ldots$.

Richiamando ora le formole date al principio del n° 2, vedesi facilmente che esse possono trasformarsi nelle seguenti:

$$n\delta_\varphi(V) = -\psi S(V) + P(V),$$

$$n\delta_\psi(V) = -\varphi T(V) + Q(V),$$

indicando con $S(V)$, $P(V)$; $T(V)$, $Q(V)$ le seguenti operazioni:

$$S(V)=\varphi(v)\sum^r \frac{1}{v-a_r}\frac{\partial V}{\partial a_r}, \qquad T(V)=\psi(v)\sum^s \frac{1}{v-a_s}\frac{\partial V}{\partial a_s},$$

$$P(V)=f_3\sum^r (a_r-v)^2\frac{\partial V}{\partial a_r}+3f_2\sum^r (a_r-v)\frac{\partial V}{\partial a_r}+3f_1\sum^r \frac{\partial V}{\partial a_r}+\frac{np}{\alpha_0}\Phi_0 V,$$

$$Q(V)=f_3\sum^s (a_s-v)^2\frac{\partial V}{\partial a_s}+3f_2\sum^s (a_s-v)\frac{\partial V}{\partial a_s}+3f_1\sum^s \frac{\partial V}{\partial a_s}+\frac{nq}{\beta_0}\Psi_0 V,$$

nelle quali

$$f_1=\frac{1}{n}\frac{df}{dv}, \qquad f_2=\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2f}{dv^2}, \qquad f_3=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\frac{d^3f}{dv^3}.$$

Ora, indicando con φ_r una qualunque delle φ_0, φ_1, ..., trovasi che

$$S(\varphi_r)=\frac{\lambda-r}{r+1}[(\lambda-r-1)\varphi_0\varphi_{r+2}-\lambda\varphi_1\varphi_{r+1}],$$

$$P(\varphi_r)=(\lambda-r)(2f_2\varphi_r-3f_1\varphi_{r+1})+r(f_3\varphi_{r-1}-f_2\varphi_r)+\frac{\lambda l}{n}\gamma_1\varphi_r,$$

nella seconda delle quali

$$\gamma_1=\frac{1}{2\rho}\frac{d\gamma}{dv}, \qquad \gamma=(\varphi\psi),$$

come sopra.

Si ottengono così le seguenti generali relazioni:

$$(7)\quad \begin{cases} n\delta_\varphi(\varphi_r)=2\lambda(f\varphi_r)_2+r(f\varphi_{r-1})_3-\dfrac{\lambda(\lambda+1)}{r+1}(\varphi_0\varphi_{r+2}-\varphi_1\varphi_{r+1})\psi_0+\dfrac{\lambda l}{n}(\gamma_1\varphi_r-\gamma_0\varphi_{r+1}),\\[2ex] n\delta_\psi(\psi_r)=2l(f\psi_r)_2+r(f\psi_{r-1})_3-\dfrac{l(l+1)}{r+1}(\psi_0\psi_{r+1}-\psi_1\psi_{r+1})\varphi_0-\dfrac{l\lambda}{n}(\gamma_1\psi_r-\gamma_0\psi_{r+1}),\end{cases}$$

essendo

$$(f\varphi_r)_2=f_2\varphi_r-2f_1\varphi_{r+1}+f_0\varphi_{r+2},$$

$$(f\varphi_{r-1})_3=f_3\varphi_{r-1}-3f_2\varphi_r+3f_1\varphi_{r+1}-f_0\varphi_{r+2}.$$

Queste espressioni di $\delta_\varphi(\varphi_r)$, $\delta_\psi(\psi_r)$ risolvono completamente, salvo nei due casi accennati, il problema dello sviluppo in serie delle funzioni sigma iperellittiche, in quanto che, essendo

$$\delta(V)=\sum_0^\lambda{}^r\frac{\partial V}{\partial\varphi_r}\delta_\varphi(\varphi_r)+\sum_0^l{}^r\frac{\partial V}{\partial\psi_r}\delta_\psi(\psi_r),$$

conducono facilmente per la loro forma ai covarianti simultanei di cui compongonsi i termini di quelle serie.

Daremo un primo esempio determinando la espressione generale del secondo termine di ciascuna funzione sigma per quanto dipende dalla operazione δ.

Dalla prima delle formole (7) si deduce per $r = 0$

$$n\delta(\varphi) = 2\lambda(f\varphi)_2 - \lambda(\lambda + 1)(\varphi_0\varphi_2 - \varphi_1^2)\psi_0 + \frac{l\lambda}{n}(\gamma_1\varphi_0 - \gamma_0\varphi_1),$$

cioè $\delta(\varphi)$ è un covariante simultaneo.

Infatti, posto

$$a = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \qquad b = (\varphi\psi)_2,$$

covarianti simultanei degli ordini $2(\lambda - 2)$, $l + \lambda - 4 = 2(\rho - 1)$, si ha:

$$n\,\delta(\varphi^\mu) = \frac{\mu(2\rho-1)(\rho+1-2\mu)}{2(\rho+1)}\left[\frac{(\rho+2\mu)(\rho+1+2\mu)}{2\rho(2\rho+1)}\varphi b - (\rho+1-2\mu)\psi a\right]\varphi^{\mu-1}, \tag{8}$$

ed il secondo membro è un covariante simultaneo dell'ordine

$$(\mu + 2)(\rho - 1) - 2\mu(\mu - 1).$$

Ora il primo termine di ciascuna sigma, secondo la notazione del prof. KLEIN, può rappresentarsi con

$$\begin{pmatrix} \mu & \mu & \\ u, & \varphi, & 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene cioè eliminando v dalla funzione

$$\varphi^\mu = (\alpha_0 v^\lambda + \lambda\alpha_1 v^{\lambda-1} + \cdots + \alpha_\lambda)^\mu$$

e dal prodotto di potenze di

$$u = u_\rho v^{\rho-1} - (\rho - 1)u_{\rho-1}v^{\rho-2} + \cdots + (-1)^{\rho-1}u_1$$

e di suoi covarianti, prodotto di ordine $\lambda\mu$ e di grado μ rispetto alle $u_1, u_2, \ldots u_\rho$.

Suppongasi dapprima $\mu = 1$; sarà φ del grado $\rho - 1$, quindi il primo termine eguale a

$$(\varphi u)_{\rho-1} = \alpha_0 u_1 + (\rho - 1)\alpha_1 u_2 + \cdots + \alpha_{\rho-1}u_\rho.$$

Il secondo membro della equazione (8), che indicherò per brevità con G, è dell'ordine $3(\rho - 1)$; quindi il secondo termine della corrispondente sigma (per quanto dipende dalla operazione δ) sarà:

$$(G u^3)_{3(\rho-1)}.$$

Per $\rho = 3$ sono φ, ψ, u, a, b degli ordini 2, 6, 2, 0, 4 e si ha:

$$8\delta(\varphi) = \tfrac{25}{28}(\varphi u)_2 (b u^2)_4 - \tfrac{5}{2} a (\psi u^3)_6 - \tfrac{5}{7}(u_1 u_3 - u_2^2)(g u)_2,$$

posto $g = (\varphi b)_2$.

Sia $\mu = 2$; φ^2 è dell'ordine $2(\rho - 3)$; indicando con h l'hessiano di u, il primo termine sarà:

$$(\varphi^2 h)_{2(\rho-3)};$$

il secondo membro della (8) è dell'ordine $4(\rho - 2)$ ed indicandolo ancora con G si avrà pel secondo termine:

$$(G,\ u^2 h)_{4(\rho-2)},$$

e così di seguito.

5. Consideriamo più particolarmente il caso di $\mu = 0$, pel quale il primo termine è eguale ad uno, ed il secondo, come si è dimostrato sopra, eguale a

$$\frac{\rho(\rho+1)^2}{4(2\rho+1)}(\varphi\psi)_2.$$

Ponendo nella (7) $\lambda = l = \rho + 1$, il valore di $\delta(\varphi_r)$, in cui si pongano per f_0, f_1, f_2, f_3 i loro valori in funzione di φ_0, φ_1, ..., ψ_0, ψ_1, ..., prende questa forma:

$$\begin{aligned} n\delta_\varphi(\varphi_r) = {} & \frac{(\rho+1)(2\rho-1)}{4(2\rho+1)} b\varphi_r - \frac{r(\rho-1)}{2(2\rho+1)}[b_0\varphi_r - b_1\varphi_{r-1}] \\ & - \frac{\rho - r + 1}{2(r+1)}[2(\rho - r)(\varphi_0\varphi_{r+2} - \varphi_1\varphi_{r+1}) + (r+1)(\varphi_1\varphi_{r+1} - \varphi_2\varphi_r)]\psi_0 \\ & - \tfrac{1}{2}[3(\rho - r + 1)(\varphi_0\varphi_{r+1} - \varphi_1\varphi_r) + r(\varphi_1\varphi_r - \varphi_2\varphi_{r-1})]\psi_1 \\ & - \frac{r}{2}[\varphi_0\varphi_r - \varphi_1\varphi_{r-1}]\psi_2, \end{aligned}$$

ed analogamente per $\delta_\psi(\psi_r)$.

Si noti che le espressioni $\varphi_0\varphi_{r+2} - \varphi_1\varphi_{r+1}$, $\varphi_1\varphi_{r+1} - \varphi_2\varphi_r$, ... sono funzioni dei covarianti simultanei

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \qquad \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_4, \qquad \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_6, \qquad \cdots$$

e loro derivate.

Applicando la formola superiore alla ricerca di $\delta(b)$, trovasi:

$$(9)\qquad n\delta(b) = -\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{3}E\varphi\psi + \frac{(\rho-1)(2\rho-7)}{2.3}J\gamma + \frac{\rho(2\rho-1)}{2\rho+1}b^2 - 4(2\rho-1)ac,$$

nella quale:

$$a = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \qquad c = \tfrac{1}{2}(\psi\psi)_2, \qquad J = (\varphi\psi)_3, \qquad E = (\varphi\psi)_4,$$

b, γ hanno i valori superiori.

Questo valore di $\delta(b)$ determina (pel caso $\mu = 0$) il terzo termine nello sviluppo della corrispondente funzione σ per la parte che dipende dalla applicazione della operazione δ. In questo termine compajono i cinque covarianti (invarianti) simultanei $\varphi\psi = f$, ac, γ, J, E.

Ora, sempre applicando la formola generale superiore, si hanno le

$$n\delta(\gamma) = \frac{\rho(\rho+1)(2\rho-1)}{2(2\rho+1)} b\gamma - \frac{\rho(\rho-1)}{2} J\varphi\psi,$$

$$n\delta(\varphi\psi) = \frac{(\rho+1)(2\rho-1)}{2}\gamma^2 - \frac{\rho(\rho-1)}{2\rho+1} b\varphi\psi,$$

$$n\delta(ac) = -3(\rho-1)\omega\gamma - \frac{2(\rho+1)(2\rho-1)}{2\rho+1} abc - \frac{(\rho-1)(\rho-2)}{3}(Ac+Ca)\varphi\psi,$$

posto

$$\omega = (ac), \qquad A = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_4, \qquad C = \tfrac{1}{2}(\psi\psi)_4,$$

e così di seguito. Nella calcolazione di questi valori si è tenuto conto di alcune sizigie esistenti fra covarianti ed invarianti simultanei delle due forme φ, ψ; le quali sizigie riducono il numero di quei covarianti od invarianti che compongono i vari termini di una sigma. Pel caso di $\rho = 2$ fu dimostrato dal prof. Wiltheiss e da me *) che il numero di quei covarianti ed invarianti è di nove.

La stessa limitazione di forme simultanee dimostrasi sussistere pel caso di $\rho = 3$ e deve aver luogo in generale. Notisi infatti che il secondo termine b della serie potendosi, secondo l'opportuno algoritmo introdotto dal sig. von Gall **), indicare con $[1, 1, 2(\rho-1)]$, cioè di primo grado rispetto ai coefficienti di φ, ψ e dell'ordine $2(\rho-1)$ rispetto a v, il termine $(m+1)^{\text{esimo}}$ può rappresentarsi con $[m, m, 2m(\rho-1)]$; quindi i covarianti ed invarianti simultanei, i quali compongono questo termine, devono soddisfare a quella condizione. Fra i medesimi sussisteranno altresì delle sizigie per le

---

*) Wiltheiss, *Eine besondere Art von Covarianten bildender Operation* [Mathematische Annalen, t. XXXVI (1890), pp. 134-153]. — Brioschi, *Ueber die Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen* [Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1890, pp. 236-238].

**) von Gall, *Die Syzyganten zweier simultanen binären biquadratischen Formen* [Mathematische Annalen, t. XXXIII (1889), pp. 197-222; t. XXXIV (1889), pp. 332-353].

quali si diminuisce nuovamente il numero delle forme simultanee indipendenti che rimangono a comporre quel termine. Infine si hanno le limitazioni dipendenti dalla speciale operazione δ.

Per $\rho = 3$, si hanno, come è noto, ventotto forme simultanee, e cioè 8 invarianti, 8 forme quadratiche, 7 biquadratiche e 5 del sesto ordine. Esse sono:

A	C	Δ	D	G	H	E	K
$\frac{1}{2}(\varphi\varphi)_4$	$\frac{1}{2}(\psi\psi)_4$	$(\psi a)_4$	$(\varphi c)_4$	$(\varphi a)_4$	$(\psi c)_4$	$(\varphi\psi)_4$	$(ac)_4$
(200)	(020)	(210)	(120)	(300)	(030)	(110)	(220)

J	n	ν	t	p	q	r	s
$(\varphi\psi)_3$	$(\varphi c)_3$	$(\psi a)_3$	$(ac)_3$	$(\varphi\beta)_4$	$(\psi\alpha)_4$	$(a\beta)_4$	$(c\alpha)_4$
(112)	(122)	(212)	(222)	(132)	(312)	(232)	(322)

φ	ψ	a	b	c	m	μ
—	—	$\frac{1}{2}(\varphi\varphi)_2$	$(\varphi\psi)_2$	$\frac{1}{2}(\psi\psi)_2$	$(\varphi c)_2$	$(\psi a)_2$
(104)	(014)	(204)	(114)	(024)	(124)	(214)

α	β	γ	l	λ
(φa)	(ψc)	$(\varphi\psi)$	(φc)	(ψa)
(306)	(036)	(116)	(126)	(216).

Il terzo termine della serie essendo rappresentabile con (2, 2, 8) potrà essere composto colle forme simultanee seguenti:

$$b^2,\quad ac,\quad J\gamma,\quad E\varphi\psi,\quad A\psi^2 + C\varphi^2,\quad m\varphi + \mu\psi;$$

ma come ha dimostrato il dott. von GALL sussistono due sigizie (2, 2, 8), cioè le

$$J\gamma - E\varphi\psi + \tfrac{1}{2}(A\psi^2 + C\varphi^2) + 3(m\varphi + \mu\psi) = 0,$$

$$b^2 - 4ac - J\gamma - \tfrac{1}{6}(A\psi^2 + C\varphi^2) + m\varphi + \mu\psi = 0,$$

le quali limitano le forme simultanee superiori alle prime quattro.

Il termine susseguente [3, 3, 12] componesi dapprima dal prodotto di b per le

quattro forme precedenti, poi delle seguenti:

$$E\gamma^2,\quad (Ac+Ca)\varphi\psi,\quad J^2\varphi\psi,\quad (D\varphi+\Delta\psi)\varphi\psi,\quad (n\varphi-\nu\psi)\gamma,$$
$$\alpha\beta,\quad l\lambda,\quad \mu\varphi c+m\psi a,$$

fra le quali sussistono le relazioni:

$$2\alpha\beta+\tfrac{1}{12}(J^2-Eb+Ac+Ca+D\varphi+\Delta\psi)\varphi\psi+abc-(\mu\varphi c+m\psi a)=0,$$

$$2l\lambda+\tfrac{1}{12}[J^2-Eb-\tfrac{1}{2}(Ac+Ca)+D\varphi+\Delta\psi]\varphi\psi+abc=0,$$

$$\mu\varphi c+m\psi a=\tfrac{1}{6}[Jb-E\gamma+2(n\varphi-\nu\psi)]\gamma+\tfrac{1}{6}(Ac+Ca)\varphi\psi;$$

il quarto termine porta quindi con sè le tre forme

$$Ac+Ca,\qquad D\varphi+\Delta\psi,\qquad n\varphi-\nu\psi,$$

all'ultima delle quali potrebbe sostituirsi il covariante

$$\omega=(a c),$$

essendo

$$n\varphi-\nu\psi=6\omega+\tfrac{1}{2}(E\gamma-Jb);$$

ed anche, introducendo il covariante $\theta=(ac)_2$, si può sostituirlo al $D\varphi+\Delta\psi$ per la relazione:

$$D\varphi+\Delta\psi=12\theta+Eb-J^2-(Ac+Ca).$$

6. Per $\rho=3$, le formole primitive del procedimento d'ARONHOLD sono le seguenti:

$$8\delta(\varphi_0)=\tfrac{5}{7}b_0\varphi_0-10a_0\psi_0,$$

$$8\delta(\varphi_1)=\tfrac{5}{7}b_0\varphi_1-(6a_1\psi_0+4a_0\psi_1)-\tfrac{1}{7}(b_0\varphi_1-b_1\varphi_0),$$

$$8\delta(\varphi_2)=\tfrac{5}{7}b_0\varphi_2-(3a_2\psi_0+6a_1\psi_1+a_0\psi_2)-\tfrac{2}{7}(b_0\varphi_2-b_1\varphi_1)-\tfrac{1}{6}A\psi_0,$$

$$8\delta(\varphi_3)=\tfrac{5}{7}b_0\varphi_3-(a_3\psi_0+6a_2\psi_1+3a_1\psi_2)-\tfrac{3}{7}(b_0\varphi_3-b_1\varphi_2)-\tfrac{1}{2}A\psi_1,$$

$$8\delta(\varphi_4)=\tfrac{5}{7}b_0\varphi_4-(4a_3\psi_1+6a_2\psi_2)-\tfrac{4}{7}(b_0\varphi_4-b_1\varphi_3)-A\psi_2,$$

essendo $a_0=a$; a_1, a_2, a_3 le sue derivate. Analogamente per le ψ_0, ψ_1, ...

Applicato lo stesso procedimento ai cinque covarianti (invarianti) simultanei

$$\varphi\psi,\quad (\varphi\psi)=\gamma,\quad (\varphi\psi)_2=b,\quad (\varphi\psi)_3=J,\quad (\varphi\psi)_4=\varepsilon,$$

si ha, come in parte si è trovato sopra:

$$8\delta(\varphi\psi) = 10\gamma^2 - \tfrac{60}{7} b\varphi\psi,$$

$$8\delta(\gamma) = -3J\varphi\psi + \tfrac{30}{7} b\gamma,$$

$$8\delta(b) = -\tfrac{2}{3}E\varphi\psi - \tfrac{1}{3}J\gamma + \tfrac{15}{7}b^2 - 20ac,$$

$$8\delta(J) = \tfrac{1}{2}E\gamma + \tfrac{1}{2}Jb - 30\omega,$$

$$8\delta(\varepsilon) = \tfrac{6}{7}Eb - 8(Ac + Ca) - 48\theta,$$

si incontrano cioè i quattro covarianti

$$ac, \quad (ac) = \omega, \quad (ac)_2 = \theta, \quad Ac + Ca.$$

Operando sopra questi col simbolo δ compajono le nuove forme

$$(ac)_3 = t, \quad (ac)_4 = K_0 \quad AC, \quad m\mu,$$

e continuando la calcolazione la quale non presenta alcuna difficoltà, salvo la ricerca delle sizigie, si ottengono i vari termini della serie formati con diciasette covarianti od invarianti.

7. Passiamo ora a considerare le due espressioni che si sono indicate con K, Λ. Anche qui escludiamo i casi di $2\mu = \rho + 1$, $2\mu = \rho$. La espressione K è data dal prof. Wiltheiss negli accennati suoi lavori sotto questa forma:

$$(x-v)^2K = (t-v)^{\rho-1}h(x) - (t-x)^{\rho-1}(vg_1+g_2) - (\rho-1)(x-v)(t-x)^{\rho-2}(tg_1+g_2),$$

nella quale $h(x)$ è la $(\rho+1)^{ma}$ polare di $f(x)$ rispetto a v, e le g_1, g_2 hanno lo stesso significato che al n° 1.

Per sviluppare il secondo membro secondo le potenze di $x - v$, pongasi per brevità:

$$t - x = y, \quad x - v = z,$$

e si rammenti essere $g = xg_1 + g_2$; si avrà:

$$z^2K = (y+z)^{\rho-1}h(x) - y^{\rho-1}g - (\rho-2)y^{\rho-1}zg_1 - (\rho-1)\rho^{\rho-2}zg.$$

Ora:

$$h(x) = f_0 + (\rho+1)zf_1 + \frac{(\rho+1)\rho}{2}z^2f_2 + \cdots + z^{\rho+1}f_{\rho+1},$$

$$g = f_0 + 3zf_1 + 3z^2f_2 + z^3f_3, \qquad g_1 = f_1 + 2zf_2 + z^2f_3,$$

essendo $f_0, f_1, \ldots$ funzioni di v. Sostituendo queste espressioni e sviluppando $(y+z)^{\rho-1}$ si ha tosto che i coefficienti di z^0, z sono eguali a zero, quindi dividendo per z^2 si otterrà:

$$K = \tfrac{1}{2}(\rho-1)(\rho-2)(y^{\rho-1}f_2 + 2y^{\rho-2}f_1 + y^{\rho-3}f_0)$$

$$+\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2.3}z[(\rho+3)y^{\rho-1}f_3 + 3(\rho+3)y^{\rho-2}f_2 + 3(\rho+1)y^{\rho-3}f_1 + (\rho-3)y^{\rho-4}f_0]$$
$$+\cdots+z^{2(\rho-1)}f_{\rho+1},$$

ed infine, ponendo $x = v$, si avrà:

$$K = \tfrac{1}{2}(\rho-1)(\rho-2)(y^{\rho-1}f_2 + 2y^{\rho-2}f_1 + y^{\rho-3}f_0),$$

od anche:

$$K = \tfrac{1}{2}(\rho-1)(\rho-2)(f_2Y_0 - 2f_1Y_1 + f_0Y_2),$$

posto

$$Y_0 = (t-x)^{\rho-1}, \quad Y_1 = \frac{1}{\rho-1}\frac{dY_0}{dx}, \quad Y_2 = \frac{1}{(\rho-1)(\rho-2)}\frac{d^2Y_0}{dx^2}.$$

Ma, indicando con V uno qualunque dei termini di una serie sigma, si ha che

$$Y_0 = (t-x)^{\rho-1} = u_1\frac{\partial V}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial V}{\partial u_2} + \cdots + u_\rho\frac{\partial V}{\partial u_\rho} = mV,$$

supponendo essere m l'ordine di V rispetto alle $u_1, u_2, \cdots u_\rho$. Si avrà così il chiesto valore di

$$K(V) = \tfrac{1}{2}m(\rho-1)(\rho-2)(fV)_2, \tag{10}$$

covariante simultaneo delle $\varphi(v)$, $\psi(v)$ dell'ordine $(m+2)(\rho-1)$.

8. La ricerca del valore di Λ può compiersi con metodo analogo. Posto

$$x - v = z, \quad v - s = w, \quad s - x = y,$$

per cui

$$y + z + w = 0,$$

indicando con

$$F(x, s) = F(s, x)$$

la polare $(\rho+1)^{\text{ma}}$ della funzione $F(x)$ rispetto ad s, e con

$$f(v, x) = f(x, v), \quad f(v, s) = f(s, v), \quad f(x, s) = f(s, x)$$

le polari $(\rho+1)^{\text{me}}$ della funzione $f(x)$, si ha, con lieve modificazione alla espressione

di Λ data dal prof. WILTHEISS nel secondo citato lavoro, essere

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}y^2 z^2 w^2 \Lambda = (\rho+1)zw^2[zF(x,s) - g_1(x)f(s,x) + g(x)f_1(s,x)]\\ +(\rho+1)z^2w[wF(s,x)+g_1(s)f(x,s)-g(s)f_1(x,s)]\\ +y^2[f(v,x)f(v,s)-f(v)f(s,x)],\end{aligned}$$

nella quale

$$f_1(s,x)=\frac{1}{\rho+1}\frac{\partial f(s,x)}{\partial x},\qquad f_1(x,s)=\frac{1}{\rho+1}\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}.$$

Ora:

$$F(x,s)=F_0(x)+(\rho+1)yF_1(x)+\frac{(\rho+1)\rho}{2}y^2F_2(x)+\cdots+y^{\rho+1}F_{\rho+1}(x),$$

$$F(s,x)=F_0(s)-(\rho+1)yF_1(s)+\frac{(\rho+1)\rho}{2}y^2F_2(s)+\cdots+(-1)^{\rho+1}y^{\rho+1}F_{\rho+1}(s),$$

ed analogamente per $f(x,s)$, $f(s,x)$, $f_1(x,s)$, $f_1(s,x)$; inoltre:

$$f(x)\ \ =f_0+nzf_1+\frac{n(n-1)}{2}z^2f_2+\cdots+z^nf_n,$$

$$f(s)\ \ =f_0-nwf_1+\frac{n(n-1)}{2}w^2f_2+\cdots+(-1)^nw^nf_n,$$

$$f(v,x)=f_0+(\rho+1)zf_1+\frac{(\rho+1)\rho}{2}z^2f_2+\cdots+z^{\rho+1}f_{\rho+1},$$

$$f(v,s)=f_0-(\rho+1)wf_1+\frac{(\rho+1)\rho}{2}w^2f_2+\cdots+(-1)^{\rho+1}w^{\rho+1}f_{\rho+1},$$

nelle quali f_0, f_1, f_2, ... sono funzioni di v. Sostituendo queste espressioni nel secondo membro della equazione superiore, può eseguirsi la divisione per $y^2z^2w^2$, e ponendo dopo $x=s=v$, si giunge alla

$$\Lambda=\frac{\rho^2(\rho+1)^2}{6}k,$$

posto

$$k=\tfrac{1}{2}(ff)_4=f_0f_4-4f_1f_3+3f_2^2,$$

covariante dell'ordine $4(\rho-1)$, e quindi:

$$\Lambda=\frac{\rho^2(\rho+1)^2}{6}(ku^4)_{4(\rho-1)}.\tag{11}$$

Il valore di k si può anche esprimere in funzione delle forme φ, ψ e dei loro covarianti simultanei come segue:

$$n^2(n-1)(n-2)k = [\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2) - \tfrac{3}{2}l\lambda]A\psi^2 + [l^2(l-1)(l-2) - \tfrac{3}{2}\lambda l]C\varphi^2$$
$$+ 6\lambda l(2\lambda l - 5)ac - 6\lambda l[(2\lambda-5)\psi\mu + (2l-5)\varphi m]$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{\lambda l}{n-3}(2\lambda l - 5n + 11)E\varphi\psi - \frac{3}{2}\frac{l\lambda}{n-1}(2\lambda l - 5n + 5)b^2,$$

nella quale a, b, c, m, μ, A, C, E sono i covarianti indicati nei n[i] precedenti. Pel caso di $l = \lambda = \rho + 1$ sarà per ciò:

$$(12)\quad \mathrm{A} = \frac{\rho^2(\rho+1)^2}{12(2\rho+1)}\left[\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2(2\rho-1)}E\varphi\psi - (\rho-1)J\gamma + 6ac + \frac{3\rho^2}{2(2\rho+1)}b^2\right].$$

9. Determinati così tutti gli elementi che entrano a comporre le equazioni (4), veniamo ora a precisare meglio come da essi si deducano i vari termini di una serie sigma. Supporremo $\mu = 0$, $l = \lambda = \rho + 1$. La seconda delle equazioni (4), nella quale pongasi

$$L = 1, \qquad M = \frac{\rho(\rho+1)^2}{4(2\rho+1)}b, \qquad nD^{-1}\delta(D) = -\frac{\rho(\rho+1)^2}{8(2\rho+1)}b,$$

diventa:

$$\frac{1}{4}\sum v^{2\rho-\alpha-\beta}\frac{\partial^2 N}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + K(M) + \frac{1}{2}L\mathrm{A} + \frac{\rho(\rho+1)^2}{4(2\rho+1)}n\delta(b) - \frac{\rho^2(\rho+1)^4}{32(2\rho+1)^2}b^2 = 0.$$

Il valore generale di $n\delta(b)$ fu trovato più addietro [equazione (9)] e per la (10) si avrà:

$$K(M) = \frac{\rho(\rho+1)^2(\rho-1)(\rho-2)}{4(2\rho+1)}(fb)_2,$$

ossia:

$$K(M) = \frac{\rho(\rho+1)^2(\rho-1)(\rho-2)}{8(2\rho+1)}\left[\frac{\rho-2}{2\rho-3}E\varphi\psi - J\gamma - 4ac + \frac{\rho}{2\rho+1}b^2\right],$$

e quindi:

$$\sum v^{2\rho-\alpha-\beta}\frac{\partial^2 N}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \frac{\rho(\rho+1)^2}{12}\left[\frac{\rho(\rho-1)(\rho-2)}{(2\rho-1)(2\rho-3)}E\varphi\psi + 2(\rho-1)J\gamma + 3\rho(4ac-b^2)\right]$$
$$+ \frac{3\rho^2(\rho+1)^4}{8(2\rho+1)}b^2.$$

Il primo membro di questa equazione è una funzione in v dell'ordine $2(\rho-1)$,

il secondo dell'ordine $4(\rho - 1)$; indicando con $F(v)$ il primo membro e con $G(v)$ il secondo, si avrà:

$$(F u^2)_{2(\rho-1)} = (G u^4)_{4(\rho-1)}.$$

Per $\rho = 3$ si ottiene così:

$$N = \frac{1}{3}(u_1 u_3 - u_2^2)(4 N_{13} - N_{22}) + \frac{1}{12}(G u^4)_8,$$

ossia

$$N = \frac{1}{12}(G u^4)_8,$$

in quanto che per questo valore si ha:

$$4 N_{13} - N_{22} = 0.$$

Nel caso generale si incontrano nel primo membro espressioni della forma:

$$2(\rho - 1) N_{13} - (\rho - 2) N_{22}, \qquad 3(\rho - 1) N_{14} - (\rho - 3) N_{23},$$

$$(\rho - 1)(\rho - 2) N_{15} - (\rho - 2)(\rho - 4) N_{24} + \frac{1}{2}(\rho - 3)(\rho - 4) N_{33},$$

e così via, tutte nulle per

$$N = \frac{1}{12}(G u^4)_{4(\rho-1)}.$$

Si ha quindi il teorema: *Il terzo termine N della serie di ciascuna funzione sigma corrispondente a $\mu = 3$, è dato dalla*

$$N = \frac{1}{12}(G u^4)_{4(\rho-1)}.$$

Importa qui notare quale forma abbiano le espressioni sopra indicate in funzione delle $u_1, u_2, \ldots$. Per $\rho = 3$ si hanno le

$$[\varphi\psi . u^4]_8 = (\varphi u^2)_4 (\psi u^2)_4 - \frac{8}{7}(u_1 u_3 - u_2^2)(b u^2)_4 - \frac{8}{15} E (u_1 u_3 - u_2^2)^2,$$

$$[J\gamma . u^4]_8 = (J u)_2 (\gamma u^3)_6 - \frac{6}{7}(u_1 u_3 - u_2^2)(\mathfrak{z} u^2)_4,$$

$$[ac . u^4]_8 = (a u^2)_4 (c u^2)_4 - \frac{8}{7}(u_1 u_3 - u_2^2)(\theta u^2)_4 - \frac{8}{15} K (u_1 u_3 - u_2^2)^2,$$

$$[b^2 . u^4]_8 = (b u^2)_4^2 - \frac{8}{7}(u_1 u_3 - u_2^2)(\chi u^2)_4 - \frac{8}{15} T (u_1 u_3 - u_2^2)^2,$$

essendo

$$\mathfrak{z} = (J\gamma)_2 = -\frac{1}{2} E b + \frac{1}{5} J^2 + A c + C a,$$

$$\theta = (ac)_2, \qquad K = (ac)_4, \qquad \chi = \frac{1}{2}(bb)_2, \qquad T = \frac{1}{2}(bb)_4,$$

e, come ha dimostrato il dott. von GALL:

$$\theta = \tfrac{1}{3}(J^2 - Eb + Ac + Ca + D\varphi + \Delta\psi),$$

$$\chi = -\tfrac{1}{12}J^2 - \tfrac{1}{6}(Ac + Ca) + \tfrac{1}{6}(D\varphi + \Delta\psi),$$

$$T = \tfrac{1}{12}E^2 + \tfrac{1}{6}AC - K.$$

10. I casi $2\mu = \rho + 1$, $2\mu = \rho$ sono, come si disse addietro, esclusi dai risultati generali precedenti; in primo luogo perchè per ciascuno di essi è $\delta(D) = 0$, e pel primo inoltre $\delta(L) = 0$ (supposto L il primo termine della serie). Però vari fra i risultati ottenuti servono opportunamente anche alla ricerca dei vari termini delle serie delle corrispondenti sigma.

Se $2\mu = \rho + 1$, il valore del secondo termine M dipende da quello di $K(L)$, e siccome per $\rho = 1$ (come per $\rho = 2$) si ha in generale $K(V) = 0$, il secondo termine della corrispondente sigma ellittica è eguale a zero.

Indicando come precedentemente con

$$h(x) = f(v, x) = f(x, v)$$

la $(\rho + 1)^{ma}$ polare di $f(v)$ rispetto ad x e con $h_1, h_2, \ldots$ le derivate di essa rispetto ad x divise per $\rho + 1$, $(\rho + 1)\rho$, ..., infine posto $y = t - x$, si può dare al valore di K la seguente forma generale:

$$K = y^{\rho-1}\sum_1^{\rho-2}{}_r(-1)^{r-1} r\frac{(\rho-1)\ldots(\rho-r-1)}{1.2\ldots(r+1)}h_{r+1}z^{r-1}$$

$$+ (\rho-1)y^{\rho-2}\sum_1^{\rho-2}{}_r(-1)^{r-1}\frac{(\rho-2)\ldots(\rho-r-1)}{1.2\ldots r}h_r z^{r-1}$$

$$+\left[\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2}y^{\rho-3} + \frac{(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)}{2.3}y^{\rho-4}z + \cdots + z^{\rho-3}\right]h.$$

Per $\rho = 3$ si deduce la

$$K = y^2 h_2 + 2yh_1 + h,$$

ossia

$$K = t^2 h_2 - 2t(xh_2 - h_1) + x^2 h_2 - 2xh_1 + h,$$

o, posto

$$h = C_0 x^4 + 4C_1 x^3 + \cdots + C_4,$$

in cui $C_0, C_1, \ldots$ sono del quarto ordine in v, si ha:

$$K = t^2(C_0x^2 + 2C_1x + C_2) + 2t(C_1x^2 + 2C_2x + C_3) + C_2x^2 + 2C_3x + C_4,$$

od infine:

$$K(V) = (C_2 u_1 + 2\, C_3 u_2 + C_4 u_3)\frac{\partial V}{\partial u_1} - (C_1 u_1 + 2\, C_2 u_2 + C_3 u_3)\frac{\partial V}{\partial u_2}$$

$$+ (C_0 u_1 + 2\, C_1 u_2 + C_2 u_3)\frac{\partial V}{\partial u_3}.$$

Ora per $\rho = 3$ il primo termine L ha per valore

$$L = u_1 u_3 - u_2^2,$$

si avrà quindi:

$$K(L) = C_0 u_1^2 + 4\, C_1 u_1 u_2 + 2\, C_2(u_1 u_3 + 2 u_2^2) + 4\, C_3 u_2 u_3 + C_4 u_3^2,$$

ossia

$$K(L) = (f u^4)_8,$$

ed il secondo termine della serie sarà così:

$$M = -\tfrac{1}{3}(f u^4)_8,$$

inoltre posto $U = (f u^4)_8$ si avrà in generale:

$$K(V) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial u_3}\frac{\partial V}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\frac{\partial V}{\partial u_2} + \frac{\partial U}{\partial u_1}\frac{\partial V}{\partial u_3}\right).$$

11. Varie altre ricerche e considerazioni potrebbero aggiungersi pei casi di $\rho > 3$, ma i risultati generali ottenuti per le tre operazioni δ, K, Λ possono agevolarle. Crediamo però opportuno di aggiungere le tre equazioni differenziali del primo ordine alle quali soddisfa un termine qualsivoglia V di ciascuna delle serie sigma, perchè esse precisano alcune differenze rispetto alle $u_1, u_2, \ldots$ fra i risultati superiori e quelli del prof. Wiltheiss. Le tre equazioni sono:

$$\sum_0^{n-1}{}_r \frac{\partial V}{\partial a_r} = -\sum_1^{\rho}{}_s (\rho - s) u_{s+1}\frac{\partial V}{\partial u_s},$$

$$\sum_0^{n-1}{}_r a_r \frac{\partial V}{\partial a_r} = \sum_1^{\rho}{}_s s\, u_s \frac{\partial V}{\partial u_s} - \mu^2 V,$$

$$\sum_0^{n-1}{}_r a_r^2 \frac{\partial V}{\partial a_r} = \sum_1^{\rho}{}_s (s-1) u_{s-1}\frac{\partial V}{\partial u_s} - \frac{1}{2 A_0}[\lambda(m+\mu)\alpha_1\beta_0 + l(m-\mu)\alpha_0\beta_1] V,$$

supposto

$$\sum_1^p u_s \frac{\partial V}{\partial u_s} = m V,$$

ed l, λ, μ avere i significati precedenti.

Luglio 1890.

CLV.

GLI INTEGRALI ALGEBRICI DELL'EQUAZIONE DI LAMÉ.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, volume I, (1892, 2° sem.), pp. 327-331.

1. In una Memoria, che ha per titolo *Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine* *), ho dimostrato che la equazione differenziale

$$(1)\qquad \varphi(s)\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy}{ds}=\left[\frac{\nu(\nu+2)}{4}s+t\right]y,$$

nella quale

$$\varphi(s)=4s^3-g_2s-g_3=4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

ν è un numero dispari e t una costante, ammette integrali algebrici.

Indicando con $P(s)$ un polinomio del grado $\frac{\nu-1}{2}$ e con ξ una qualsivoglia delle radici e_1, e_2, e_3; ponendo

$$P(s)=\prod_1^{\frac{\nu-1}{2}}(s-s_r),\qquad \mu(s)=\frac{\varphi(s)}{s-\xi},$$

e

$$(2)\qquad \begin{cases} t_1(a)=\sqrt{\mu(s)}-\sqrt{\mu(a)}-2(s-a),\\ t_2(a)=\sqrt{\mu(s)}+\sqrt{\mu(a)}-2(s-a);\end{cases}$$

ho anche dimostrato che i valori degli integrali y_1, y_2 della equazione (1) sono:

*) [LXXIII: t. II, pp. 177-187].

$$y_1 = \sqrt{P(s)}(s-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_1(\xi)}{t_2(\xi)}\right]^{\frac{1}{4}}\prod_1^{\frac{\nu-1}{2}}\left[\frac{t_1(s_r)}{t_2(s_r)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$y_2 = \sqrt{P(s)}(s-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_2(\xi)}{t_1(\xi)}\right]^{\frac{1}{4}}\prod_1^{\frac{\nu-1}{2}}\left[\frac{t_2(s_r)}{t_1(s_r)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

ponendo $a = \xi$ ed $a = s_r$ nelle espressioni (2).

Questi valori di y_1, y_2 si ponno trasformare nel modo seguente. Essendo

$$t_1(a)t_2(a) = 4(s-a)[2s+\xi-\sqrt{\mu(s)}],$$

si hanno le

$$t_2(a)[t_1(a)+4(s-a)] = 4(s-a)[2a+\xi+\sqrt{\mu(a)}],$$

$$t_1(a)[t_2(a)+4(s-a)] = 4(s-a)[2a+\xi-\sqrt{\mu(a)}],$$

inoltre le

$$t_1(a)[t_1(a)+4(s-a)] = L(a), \quad t_2(a)[t_2(a)+4(s-a)] = M(a),$$

posto

$$L(a) = [\sqrt{\mu(s)}-\sqrt{\mu(a)}]^2 - 4(s-a)^2,$$

$$M(a) = [\sqrt{\mu(s)}+\sqrt{\mu(a)}]^2 - 4(s-a)^2.$$

Si ottengono così le due relazioni:

$$4(s-a)[2a+\xi+\sqrt{\mu(a)}]\frac{t_1(a)}{t_2(a)} = L(a),$$

$$4(s-a)[2a+\xi-\sqrt{\mu(a)}]\frac{t_2(a)}{t_1(a)} = M(a),$$

e per esse i valori di y_1, y_2, trascurando un coefficiente costante, prendono la forma:

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = L^{\frac{1}{4}}(\xi)\prod_1^{\frac{\nu-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}(s_r), \\ y_2 = M^{\frac{1}{4}}(\xi)\prod_1^{\frac{\nu-1}{2}} M^{\frac{1}{2}}(s_r). \end{cases}$$

Si noti che, posto

$$A_r = \sqrt{\mu(s_r)} - \sqrt{\mu(\xi)}, \qquad B_r = 2(s_r-\xi), \qquad C_r = \sqrt{\mu(s_r)} + \sqrt{\mu(\xi)},$$

$$A = \sqrt{\mu(s)} - \sqrt{\mu(\xi)}, \qquad B = 2(s-\xi), \qquad C = \sqrt{\mu(s)} + \sqrt{\mu(\xi)},$$

e quindi

$$L(\xi) = A^2 - B^2, \qquad M(\xi) = C^2 - B^2,$$

sono:

$$L(s_r) = (A - A_r)^2 - (B - B_r)^2, \qquad M(s_r) = (C + A_r)^2 - (B - B_r)^2.$$

2. I valori (3) possono essere nuovamente trasformati colle seguenti considerazioni. Sia $F(\zeta_1, \zeta_2)$ la forma biquadratica

$$F(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1^4 - 6\rho\zeta_1^2\zeta_2^2 + \zeta_2^4;$$

indicando con

$$H = \tfrac{1}{2}(FF)_2, \qquad T = 2(FH),$$

i suoi due covarianti, si hanno pei loro valori:

$$H = -\rho F - (9\rho^2 - 1)\zeta_1^2\zeta_2^2, \qquad T = (9\rho^2 - 1)\zeta_1\zeta_2(\zeta_2^4 - \zeta_1^4).$$

Supponendo nelle formule del n° precedente $\xi = e_1$, pongasi $\rho = \frac{e_1}{e_2 - e_3}$, ed *)

$$s = -(e_2 - e_3)\frac{H}{F}, \tag{4}$$

si ottengono le

$$s - e_1 = \frac{\mu(e_1)}{e_2 - e_3}\frac{\zeta_1^2\zeta_2^2}{F}, \quad s - e_2 = \frac{e_1 - e_2}{F}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2, \quad s - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{F}(\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2,$$

e quindi:

$$\sqrt{\mu(s)} = \frac{\sqrt{\mu(e)}}{F}(\zeta_2^4 - \zeta_1^4).$$

I valori di $L(\xi)$, $M(\xi)$, $L(s_r)$, $M(s_r)$ si trasformano così nei seguenti:

$$L(\xi) = 4\mu(e_1)\frac{\zeta_1^4}{F}, \qquad M(\xi) = 4\mu(e_1)\frac{\zeta_2^4}{F},$$

$$L(s_r) = \frac{1}{F}[(C_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}}\zeta_1^2 - (A_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}}\zeta_2^2]^2,$$

$$M(s_r) = \frac{1}{F}[(A_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}}\zeta_1^2 - (C_r^2 - B_r^2)^{\frac{1}{2}}\zeta_2^2]^2,$$

*) PICK, *Ueber die Integration der* LAMÉ'*schen Differentialgleichung* [Sitzungsberichte der math. natur. Classe der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, t. XCVI (1887), pp. 872-890].

e gli integrali y_1, y_2 diventano:

$$(5)\qquad y_1 = \frac{U}{F^{\frac{\nu}{4}}}, \qquad y_2 = \frac{V}{F^{\frac{\nu}{4}}},$$

essendo

$$U = z_1 S(z_1^2, z_2^2), \qquad V = z_2 S(z_2^2, z_1^2),$$

ed S un polimonio in z_1^2, z_2^2 del grado $\frac{\nu - 1}{2}$ *). I coefficienti delle più alte potenze di z_1^2 in U e di z_2^2 in V potendo ritenersi eguali all'unità, i polinomi U, V contengono ciascuno gli stessi coefficienti in numero $\frac{\nu - 1}{2}$.

3. Per determinare il valore di questi coefficienti si osservi che, posto $z = \frac{z_1}{z_2}$, dalla relazione (4) si ha:

$$ds = 2(e_2 - e_3)\frac{T}{F^2}dz;$$

ma pel valore di T:

$$\frac{T}{F^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\varphi(s)}}{(e_2 - e_3)^{\frac{3}{2}}};$$

quindi:

$$\frac{ds}{dz} = \frac{2}{(e_2 - e_3)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sqrt{\varphi(s)}}{\sqrt{F}}.$$

Dalla prima delle (5) derivando si deduce la

$$\frac{2\sqrt{\varphi(s)}}{(e_2 - e_3)^{\frac{1}{2}}}\frac{dy_1}{ds} = \frac{FU' - \frac{\nu}{4}F'U}{F^{\frac{\nu+2}{4}}},$$

e derivando di nuovo:

$$\frac{4}{e_2 - e_3}\left[\varphi(s)\frac{d^2y_1}{ds^2} + \frac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy_1}{ds}\right]$$

$$= \frac{1}{F^{\frac{\nu}{4}+1}}\left[F^2U'' - \frac{\nu - 1}{2}FF'U' - \frac{\nu}{4}FF''U + \frac{\nu(\nu + 2)}{16}F'^2U\right];$$

*) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. II (Paris, 1888), pag. 474.

ma:

$$U' = \nu U_1, \qquad U'' = \nu(\nu - 1) U_2, \qquad F' = 4 F_1, \qquad F'' = 12 F_2;$$

si avrà perciò, per la (1):

$$\frac{4}{e_2 - e_3}\left[\frac{\nu(\nu+2)}{4}s + t\right]y_1 = \frac{\nu(\nu-1)}{F^{\frac{\nu}{4}}}(F\,U)_2 - \nu(\nu+2)\frac{H}{F}y_1,$$

o, rammentando il valore (4) di s, si avrà:

$$(F\,U)_2 = \frac{4t}{\nu(\nu-1)(e_2 - e_3)}U,$$

ossia

$$\zeta_1^2 U_{22} + 6\rho\zeta_1\zeta_2 U_{12} + \zeta_2^2 U_{11} = k\,U,$$

posto

$$k = \rho + \frac{4t}{\nu(\nu-1)(e_2 - e_3)}.$$

Da quest'ultima equazione si ottengono i valori dei coefficienti di U e quello di k; quest'ultimo sarà dato evidentemente da una equazione del grado $\frac{\nu+1}{2}$.

Pei casi di $\nu = 1, 3, 5$ si avranno:

$$t = 0, \qquad t^2 = \tfrac{3}{4}g_2, \qquad t^3 - 7g_2 t + 20 g_3 = 0.$$

4. Una speciale proprietà degli integrali y_1, y_2 dell'equazione differenziale (1) rilevasi dalle seguenti considerazioni. Sia $f(y_1, y_2)$ una forma biquadratica a coefficienti costanti, e supposto sostituiti in essa per y_1, y_2 i loro valori, sarà

$$f(y_1, y_2) = \chi(s),$$

essendo χ un polinomio in s, il quale, come è noto, deve soddisfare ad una equazione differenziale lineare del quinto ordine. Questa equazione è la seguente:

$$\varphi^2\chi^{\text{v}} + 5\varphi\varphi'\chi^{\text{iv}} + 5\left[\tfrac{3}{4}\varphi'^2 + 4(6s - \psi)\varphi\right]\chi''' + 5[6(2-\psi')\varphi + 6(3s - \psi)\varphi']\chi''$$
$$+ [6(3 - 4\psi')\varphi' + 48s(3s - 5\psi) + 64\psi^2]\chi' + 16\psi'(4\psi - 3s)\chi = 0,$$

nella quale

$$\psi = \frac{\nu(\nu+2)}{4}s + t.$$

Posto

$$\chi = s^{\frac{\nu-1}{2}} + a_1 s^{\frac{\nu-3}{2}} + \cdots + a_{\frac{\nu-1}{2}},$$

la equazione superiore dà $\frac{\nu + 3}{2}$ relazioni; ma queste, essendo il coefficiente della più alta potenza di s eguale a zero, riduconsi a $\frac{\nu + 1}{2}$, che son sufficienti a determinare i valori di $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{\nu-1}{2}}$ e di t.

Per $\nu = 1$ si ha $z = 1$, $t = 0$; per $\nu = 3$ si ha $z = s - \frac{2}{3}t$, e $t^2 = \frac{3}{4}g_2$; per $\nu = 5$ si ottiene $z = s^2 - \frac{5}{16}ts + \frac{1}{320}(23t^2 - 81g_2)$ e $t^3 - 7g_2t + 20g_3 = 0$.

Novembre 1892.

CLVI.

SULLE EQUAZIONI MODULARI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, volume II (1893, 2° sem.), pp. 185-192.

1. Il terzo volume del *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* di HALPHEN *), rimasto incompiuto per l'immatura morte dell'autore, contiene alcune pagine che portano il titolo *« Fragments relatifs à la transformation »,* nelle quali l'eminente analista, ritornando più volte sul calcolo delle equazioni modulari, fa conoscere i vari tentativi da lui escogitati per risolvere colla maggiore generalità l'importante problema.

Fra questi tentativi, tutti degni di studio, pare a me che alcuni (pag. 212, 265) meritino in modo speciale di essere posti in luce e completati. Questo è lo scopo del presente scritto.

2. In una mia comunicazione all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, del mese di novembre 1874 **), ed in una susseguente del gennaio 1891 ***), ho fatto conoscere che, posto

$$\frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}, \tag{1}$$

essendo $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$, $\psi(y) = 4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3$; la formola di trasfor-

*) [Paris, 1891].

**) *Sur une formule de trasformation des fonctions elliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXIX (1874), pp. 1065-1069].

***) *Sur une classe d'équations modulaires* [Ibid., t. CXII (1891), p. 28-32].

mazione di ordine n, numero primo, è la seguente:

$$(2) \qquad y = \frac{U}{T^2}.$$

In essa U è un polinomio in x del grado n, T un polinomio del grado $\nu = \frac{n-1}{2}$; e ponendo

$$T = x^\nu + \nu a_1 x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_\nu,$$

si ha:

$$(3) \qquad U = [nx + (n-1)a_1] T^2 - \tfrac{1}{2} \varphi'(x) T T' - \varphi(x)(T T'' - T'^2),$$

in cui

$$T' = \frac{dT}{dx}, \qquad T'' = \frac{d^2 T}{dx^2}.$$

Che inoltre, ponendo

$$V = [(2n+1)x + 2(n-1)a_1] U^2 - \tfrac{1}{2}\varphi' U U' - \varphi(x)(U U'' - U'^2),$$

si aveva identicamente:

$$V - x U^2 + \tfrac{1}{2}\gamma_2 U T^2 + \gamma_3 T^4 = 0,$$

dalla quale equazione potevasi dedurre una serie di relazioni fra i coefficienti a_1, a_2, a_3, ... del polinomio T e le γ_2, γ_3; e da queste la equazione modulare per mezzo di eliminazioni. Le formole ottenute in questo modo sono alquanto complicate, ed il sostituire nelle formole stesse ai coefficienti del polinomio T la somma delle potenze delle radici dell'equazione $T = 0$, come fece HALPHEN, serve a semplificarlo e ad agevolare di qualche poco il calcolo delle equazioni modulari.

3. Sostituendo nella equazione (2) il valore (3) di U, si ottiene:

$$y = nx - 2s_1 - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\frac{T'}{T} - \varphi(x)\left(\frac{T'}{T}\right)',$$

essendo $s_1 = -\nu a_1$. Ora, indicando con s_m la somma delle potenze m^{ime} delle radici della equazione $T = 0$, si ha che

$$\frac{T'}{T} = \sum_1^\infty{}_m \frac{s_{m-1}}{x^m},$$

e per ciò sarà:

$$y = nx - 2s_1 - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\sum_1^\infty{}_m \frac{s_{m-1}}{x^m} + \varphi(x)\sum_1^\infty{}_m \frac{m\, s_{m-1}}{x^{m+1}}.$$

Halphen, dopo avere dato questa formola, osserva (pag. 266) che il termine costante nel secondo membro è

$$-2s_1 - 6s_1 + 8s_1 = 0,$$

che il coefficiente di x è

$$n - 6s_0 + 4s_0 = 1, \quad \text{essendo} \quad s_0 = \frac{n-1}{2},$$

e che per ciò può scriversi:

$$(4) \qquad y = x + \sum_1^{\infty} \frac{\rho_m}{x^m},$$

essendo

$$(5) \qquad \rho_m = 2(2m+1)\, s_{m+1} - \tfrac{1}{2}(2m-1) g_2 s_{m-1} - (m-1) g_3 s_{m-2}.$$

Trattasi ora di determinare quali relazioni devono sussistere fra i coefficienti ρ_m, perchè sia soddisfatta la equazione differenziale (1). Questa ricerca rimase incompiuta nel citato frammento.

4. Dalla equazione (4) si deducono le seguenti:

$$y' = 1 - \sum_1^{\infty} \frac{m\rho_m}{x^{m+1}}, \quad y'' = \sum_1^{\infty} \frac{m(m+1)\rho_m}{x^{m+2}}, \quad y''' = -\sum_1^{\infty} \frac{m(m+1)(m+2)\rho_m}{x^{m+3}},$$

mentre dalla (1), ossia dalla

$$(a) \qquad \psi(y) = y'^2 \varphi(x),$$

si ottengono per successive derivazioni le

$$(b) \qquad \psi'(y) = 2y''\varphi(x) + y'\varphi'(x),$$

$$(c) \qquad \psi''(y)y' = 2y'''\varphi(x) + 3y''\varphi'(x) + y'\varphi''(x).$$

Dall'eguagliare i termini costanti nei due membri delle equazioni (a), (b) si ottengono le relazioni:

$$12\rho_2 - \gamma_3 = -g_3 - 16\rho_2,$$

da cui

$$28\rho_2 = \gamma_3 - g_3,$$

e

$$24\rho_1 - \gamma_2 = 16\rho_1 - 12\rho_1 - g_2,$$

da cui

$$20\rho_1 = \gamma_2 - g_2.$$

La (c) conduce infine alle due relazioni generali:

$$
(6)\quad \begin{cases} (2m-1)\left[(4m+5)\rho_{2m+1} - \frac{1}{4}(4m-1)g_2\rho_{2m-1} - (m-1)g_3\rho_{2(m-1)}\right] \\ \qquad - 3\rho_m^2 - 6\sum_1^m{}' \rho_{m-s}\rho_{m+s} = 0, \\ m\left[(4m+7)\rho_{2(m+1)} - \frac{1}{4}(4m+1)g_2\rho_{2m} - \frac{1}{2}(2m-1)g_3\rho_{2m-1}\right] \\ \qquad - 3\sum_1^m{}' \rho_{m-s+1}\rho_{m+s} = 0, \end{cases}
$$

per $m = 1, 2, 3, \ldots$

Per $m = 1$ si hanno così le

$$3\rho_3 = \rho_1^2 + \tfrac{1}{4}g_2\rho_1,$$

$$11\rho_4 = 3\rho_1\rho_2 + \tfrac{5}{4}g_2\rho_2 + \tfrac{1}{2}g_3\rho_1,$$

formole già date da HALPHEN, ed i coefficienti $\rho_3, \rho_4, \rho_5, \ldots$ si dimostrano quindi funzioni di ρ_1, ρ_2, g_2, g_3.

5. Ciò posto, ecco come le calcolazioni per la ricerca dell'equazione modulare possono essere agevolate da questi risultati. È noto che, per una trasformazione dell'ordine n, questa equazione è del grado $n+1$, della forma seguente:

$$\xi^{n+1} + \alpha g_2 \xi^{n-1} + \beta g_3 \xi^{n-2} + \cdots = 0,$$

essendo $\xi = s_1$ ed $\alpha, \beta, \ldots$ coefficienti numerici. Ora dalla relazione (5) deducesi, per la proprietà dimostrata rispetto ai coefficienti $\rho_3, \rho_4, \rho_5, \ldots$, che le somme $s_2, s_3, s_4, \ldots$ si possono esprimere in funzione di $\xi, \rho_1, \rho_2, g_2, g_3$. Ma è noto che le somme $s_{\nu+1}, s_{\nu+2}, s_{\nu+3}, \ldots$ sono funzioni delle $s_1, s_2, \ldots s_\nu$; e si arriva così a stabilire una serie di relazioni fra le $\xi, \rho_1, \rho_2, g_2, g_3$. Eliminando da tre di esse le ρ_1, ρ_2 si ottiene la equazione modulare.

6. Dalle equazioni (5), (6) si deducono facilmente i valori di $s_2, s_3, s_4, \ldots$ in funzione di ρ_1, ρ_2, ξ. Questi valori sono:

$$6s_2 = \rho_1 + \frac{n-1}{4}g_2, \qquad 10s_3 = \rho_2 + \frac{n-1}{2}g_3 + \tfrac{3}{2}g_2\xi,$$

$$14s_4 = \tfrac{1}{3}\rho_1^2 + \tfrac{1}{2}g_2\rho_1 + \frac{5(n-1)}{3\cdot 4^2}g_2^2 + 2g_3\xi,$$

$$18 s_5 = \frac{3}{11} \rho_1 \rho_2 + \frac{3.17}{2.5.11} g_2 \rho_2 + \frac{6}{11} g_3 \rho_1 + \frac{3(n-1)}{2.5} g_2 g_3 + \frac{3.7}{5.8} g_2^2 \xi,$$

$$22 s_6 = \frac{1}{13} \rho_2^2 + \frac{2}{3.13} \rho_1^3 + \frac{3.5}{7.13} g_2 \rho_1^2 + \frac{31}{5.13} g_3 \rho_2 + \frac{751}{3.7.4^2.13} g_2^2 \rho_1$$

$$+ \frac{3.5(n-1)}{7.4^3} g_2^3 + \frac{n-1}{5} g_3^2 + \frac{3.29}{2.5.7} g_2 g_3 \xi,$$

e così di seguito.

Per $n = 5$, essendo s_3 funzione di s_1, s_2, dalle prime due delle equazioni superiori si otterrà una relazione fra ρ_1, ρ_2, ξ; così per $n = 7$ dalle prime tre, ed infine per $n = 11$ dalle cinque. Queste equazioni sono
per $n = 5$:

$$\rho_2 - \tfrac{5}{2} \rho_1 \xi + 5 \xi^3 - g_2 \xi + 2 g_3 = 0;$$

e per $n = 7$:

$$\tfrac{5}{12} \rho_1^2 - \tfrac{28}{5} \rho_2 \xi - \tfrac{1}{4} g_2 \rho_1 - 7 \xi^4 + 7 \rho_1 \xi^2 + \tfrac{21}{10} g_2 \xi^2 - \tfrac{54}{5} g_3 \xi + \tfrac{9}{16} g_2^2 = 0;$$

ma la complicazione dei coefficienti numerici pel caso di $n = 11$ dimostra tosto che per questa via si giunge difficilmente al risultato.

Posto $\xi = \frac{n-1}{2} z$, ossia $z = -a_1$, le note equazioni modulari per $n = 5$, $n = 7$, sono:

$$z^6 - \frac{5}{4} g_2 z^4 - 5 g_3 z^3 - \frac{5}{16} g_2^2 z^2 - \frac{1}{4} g_2 g_3 z - \frac{5}{3^3.4^3} g_2^3 + \frac{5}{3^3.4^3} \delta = 0,$$

$$z^8 - \frac{7}{3} g_2 z^6 - 14 g_3 z^5 - \frac{5.7}{3.8} g_2^2 z^4 - \frac{7}{3} g_2 g_3 z^3 - \frac{5.7}{3^3.4^2} g_2^3 z^2 - \frac{1}{3.8} g_2^2 g_3 z$$

$$- \frac{7}{3^4.4^4} g_2^4 + \frac{7^2}{3^6} \delta z^2 = 0,$$

e l'equazione modulare per un valore qualunque di n, numero primo, ha la forma:

$$F(z) + \delta f(z) = 0,$$

essendo $F(z)$ un polinomio del grado $n+1$, $f(z)$ del grado $n-5$; e $\delta = g_2^3 - 27 g_3^2$.

7. Posto

$$F(z) = z^{n+1} + A_1 z^n + A_2 z^{n-1} + A_3 z^{n-2} + \cdots + A_{n+1},$$

i coefficienti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ hanno i valori seguenti:

$$A_1 = 0, \qquad 2rA_{2r} = -(n+1)\frac{n(n-1)\ldots(n-2r+2)}{1.2.3\ldots(2r-2)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^r,$$

$$(2r+1)A_{2r+1} = -(n+1)\frac{n(n-1)\ldots(n-2r+1)}{1.2.3\ldots(2r-1)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^{r-1}\frac{g}{8}.$$

Questi valori, facilmente calcolabili col metodo indicato da HALPHEN nei citati *Fragments divers* (p. 213) nella ipotesi di $\delta = 0$, risolvono nella sua generalità parte del problema, ma rimane intatta la ricerca della funzione $f(\chi)$. I polinomi $F(\chi)$ hanno proprietà analoghe ai polinomi delle formole di moltiplicazione, in quanto che quelli di grado superiore al quarto si possono esprimere in funzione dei polinomi di gradi inferiori. Per esempio, indicando con $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots$ polinomi in χ della stessa forma dei polinomi $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots$ delle formole di moltiplicazione, le equazioni modulari sono:

$$\text{per } n = 3, \quad \varphi_3 = 0; \qquad \text{per } n = 5, \quad \varphi_4 - \tfrac{1}{32}\delta\varphi_2 = 0;$$

e così via.

8. Si indichino con $x, x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}$ le radici della equazione $T(x) = 0$, sieno cioè

$$x = \wp\left(\frac{2\omega}{n}\right), \quad x_1 = \wp\left(\frac{4\omega}{n}\right), \quad x_2 = \wp\left(\frac{6\omega}{n}\right), \quad \ldots, \quad x_{\nu-1} = \wp\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right),$$

si avrà:

$$\chi = \frac{2}{n-1}(x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{\nu-1}).$$

Ora rammentando la formola *):

$$\wp(nu) = \wp(u) - \frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2},$$

nella quale $\psi_{n-1}, \psi_n, \psi_{n+1}$ sono polinomi in $\wp(u)$, si ha che χ potrà esprimersi con quei polinomi in funzione di x. La ricerca della equazione modulare può quindi farsi dipendere da quella delle equazioni per la moltiplicazione.

Consideriamo dapprima, per maggiore chiarezza, alcuni casi particolari. Sia $n = 5$; si ha:

$$\chi = \frac{1}{2}(x + x_1) \quad \text{ed} \quad x_1 = x - \frac{\psi_3}{\psi_2^2}, \quad \text{essendo} \quad \psi_1 = 1.$$

*) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, pp. 100-103.

Ma dai valori di ψ_2, ψ_3, ψ_4 si deduce che

$$\psi_2^2 x = \frac{1}{3}\psi_3 + \frac{1}{12}\frac{(\psi_4 + \psi_2^5)^2}{\psi_2^2\psi_3^2};$$

quindi:

$$\chi = \frac{1}{12}\frac{(\psi_4 + \psi_2^5)^2}{\psi_2^4\psi_3^2} - \frac{1}{6}\frac{\psi_3}{\psi_2^2} = \frac{1}{12\psi_2^4\psi_3^2}[(\psi_4 + \psi_2^5)^2 - 2\psi_3^3\psi_2^2],$$

e ponendo

$$\psi_3 = h^{\frac{1}{3}}\psi_2^{\frac{8}{3}}, \qquad \psi_4 = k\psi_2^5,$$

si ha:

$$\chi = \frac{1}{12}\left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}[(k+1)^2 - 2h];$$

e siccome l'equazione della moltiplicazione ($\psi_5 = 0$) è in questo caso

$$k - h = 0,$$

sarà infine:

$$\chi = \frac{1}{12}\left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}(h^2 + 1).$$

Per $n = 7$, si avranno come sopra:

$$x = \frac{m}{12}[(k+1)^2 + 4h], \qquad x_1 = x - mh,$$

posto $m = \left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}$; inoltre:

$$x_2 = x - mk,$$

e per queste:

$$\chi = \frac{1}{12}m(k-1)^2,$$

essendo $\gamma_7 = 0$, ossia:

$$k^3 - hk + h^2 = 0.$$

Per $n = 11$, oltre i valori superiori di x, x_1, x_2, si hanno:

$$x_3 = x - m\frac{h(k-h)}{k^2}, \qquad x_4 = x - m\frac{hk(k-h-k^2)}{(k-h)^2},$$

e fra le h, k sussiste la relazione $\gamma_{11} = 0$, ossia

$$hk(k^2 - k + h)^3 - (k-h)^3(k^3 - hk + h^2) = 0.$$

Analogamente, per qualsivoglia valore di n, la χ si esprime in funzione di m, h, k e queste due ultime quantità sono legate da una equazione. Ora, siccome i valori di

g_2, g_3 si ponno facilmente esprimere in funzione di m, h, k, eliminando dalle quattro relazioni così stabilite le quantità m, h, k si ottiene la equazione modulare.

I valori di g_2, g_3 sono:

$$g_2 = \frac{m^2}{12}\{[(k+1)^2+4h]^2 - 24h(k+1)\},$$

$$g_3 = -\frac{m^3}{6^3}\{[(k+1)^2+4h]^3 - 36h(k+1)[(k+1)^2+4h] + 216h^2\};$$

e quindi:

$$(7) \qquad \delta = -m^6h^3[k(k+1)^3 + 8h(k+1)^2 - 36hk + 16h^2 - 9h].$$

9. La conoscenza del polinomio $F(z)$ può agevolare la ricerca per le considerazioni seguenti.

Posto $y = z - x$, si sostituisca alla z in quel polinomio $y + x$, si avrà:

$$(8)\ F(z) = y^{n+1} + (n+1)c_1y^n + \frac{(n+1)n}{2}c_2y^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{2.3}c_3y^{n-2} + \cdots + c_{n+1},$$

nella quale le c_1, c_2, c_3, ... sono funzioni di x dei gradi primo, secondo, terzo e così via.

Dai valori di A_{2r}, A_{2r+1} stabiliti nel n° 6 deducesi che, rappresentando c_s col polinomio

$$c_s = x^s + B_2x^{s-2} + B_3x^{s-3} + \cdots + B_s,$$

i coefficienti B_2, B_3, ... hanno i valori:

$$2rB_{2r} = -\frac{s(s-1)\ldots(s-2r+1)}{1.2\ldots(2r-2)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^r,$$

$$(2r+1)B_{2r+1} = -\frac{s(s-1)\ldots(s-2r)}{1.2\ldots(2r-1)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^{r-1}\frac{g_3}{8};$$

quindi:

$$c_1 = x, \qquad c_2 = x^2 - \frac{1}{12}g_2, \qquad c_3 = x^3 - \frac{1}{4}g_2x - \frac{1}{4}g_3,$$

$$c_4 = x^4 - \frac{1}{2}g_2x^2 - g_3x - \frac{1}{48}g_2^2, \text{ ecc.}$$

Ora queste funzioni, le quali non mutano per valori diversi di n, si ponno esprimere facilmente in funzione di m, h, k; e si hanno i valori:

$$c_1 = \frac{m}{12}[(k+1)^2 + 4h], \qquad c_2 = \frac{m^2}{6}h(k+1), \qquad c_3 = \frac{m^3}{4}h^2,$$

$$c_4 = \frac{m^4}{3} h^3, \qquad c_5 = \frac{m^5}{12} h^3 (k^2 + k + 4h), \qquad c_6 = \frac{m^6}{2} h^4 k - \frac{1}{2.3^3} \delta,$$

$$c_7 = \frac{m^7}{12} h^4 [k(k+1)^2 + 4hk - h] - \frac{5}{3.4^3} \delta c_1,$$

$$c_8 = \frac{m^8}{3} h^5 (k^2 + k - h) - \frac{1}{3^3} \delta (3c_1^2 + 2c_2),$$

e così di seguito.

I valori di y risultano in conseguenza:

$$\text{per } n = 5, \quad y = -\frac{m}{2} h; \qquad \text{per } n = 7, \quad y = -\frac{m}{3}(h + k);$$

$$\text{per } n = 11, \quad y = -\frac{m}{5}\left[h + k + \frac{h(k-h)}{k^2} + \frac{hk(k-h-k^2)}{(k-h)^2}\right].$$

10. Nel primo caso di $n = 5$, sostituendo nella (8) i valori di $c_1, c_2, \ldots$ ed il corrispondente di y, rammentando essere $k = h$, si ha:

$$F(z) = -\frac{1}{4^3} m^6 h^5 (h^2 + 11h - 1) - \frac{1}{2.3^3} \delta;$$

ma il valore (7) di δ è in questo caso:

$$\delta = -m^6 h^5 (h^2 + 11h - 1);$$

quindi:

$$F(z) = -\frac{5}{3^3.4^3} \delta,$$

da cui l'equazione modulare

$$F(z) + \frac{5}{3^3.4^3} \delta = 0.$$

11. I coefficienti $c_4, c_5, c_6, \ldots$, come le quantità g_2, g_3, δ e le h, k, m possono esprimersi in funzione di c_1, c_2, c_3. Si hanno infatti le

$$c_4 = 4c_1c_3 - 3c_2^2, \qquad c_5 = 3c_1c_4 - 2c_2c_3, \qquad c_6 + \frac{1}{2.3^3}\delta = 9c_2c_4 - 8c_3^2,$$

$$c_7 + \frac{5}{3.4^3}\delta c_1 = 6c_2c_5 - 5c_3c_4, \qquad c_8 + \frac{1}{3^2}\delta c_1^2 = 4c_2c_6 - 3c_4^2;$$

inoltre:

$$g_2 = 12(c_1^2 - c_2), \qquad g_3 = -4(2c_1^3 - 3c_1c_2 + c_3),$$

da cui:

$$\delta = 3^3.4^2(3c_1^2c_2^2 + 6c_1c_2c_3 - 4c_1^3c_3 - 4c_2^3 - c_3^2);$$

ed infine:

$$m = \frac{4^3}{3^2}\frac{c_3^3}{c_4^2}, \qquad h = \frac{3^3}{4^4}\frac{c_4^3}{c_3^4}, \qquad k = \frac{9c_2c_4 - 8c_3^2}{8c_3^2},$$

e la $F(z)$ diverrà così una funzione delle c_1, c_2, c_3. Calcolata questa funzione, la equazione

$$F(z) + \delta f(z) = 0,$$

e la equazione corrispondente della moltiplicazione condurranno al valore di $f(z)$ e quindi all'equazione modulare.

12. Nelle formole precedenti si è posto

$$\wp'(u) = -\psi_2,$$

per conformarci alla notazione di HALPHEN; ma dimostrasi essere in generale:

$$\wp'(nu) = -\frac{\psi_{2n}}{\psi_n^4}.$$

Questa formola conduce a stabilire la relazione esistente fra le equazioni modulari denominate Jacobiane e le equazioni della moltiplicazione. Infatti, indicando con v la radice di una delle prime equazioni, è noto essere

$$\delta^{\frac{n-1}{4}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} v^6 \prod \wp'^2\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right) \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \nu).$$

Supponendo, per esempio, $n = 5$, trovasi essere

$$v^6 = -\frac{h^2 + 11h - 1}{h},$$

e siccome pei valori dati sopra per g_2, δ si ha:

$$12\frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} = -\frac{h^4 + 12h^3 + 14h^2 - 12h + 1}{h^{\frac{5}{3}}(h^2 + 11h - 1)^{\frac{1}{3}}},$$

si ottiene la nota equazione:

$$v^{12} + 10v^6 - 12\frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}}v^2 + 5 = 0,$$

la quale può considerarsi siccome conseguenza della $k = h$ della moltiplicazione.

Settembre 1893.

CLVII.

NOTIZIE SULLA VITA E SULLE OPERE DI ARTURO CAYLEY *).

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, volume IV (1895, 1° semestre), pp. 177-185.

Nel compiere il debito doloroso di annunciare all'Accademia la perdita del suo illustre Socio Straniero ARTURO CAYLEY, credo interpretare il desiderio dei Colleghi e di tutti i cultori delle matematiche discipline, aggiungendo alcune notizie sulla vita e sulle opere del grande matematico inglese **).

ARTURO CAYLEY nacque il 16 agosto 1821 a Richmond nella Contea di Surrey. Suo padre era socio nella casa mercantile THORNTON, MELVILLE e CAYLEY, commercianti in Pietroburgo. ARTURO ebbe due fratelli, il maggiore morto nell'infanzia, l'altro valente nella letteratura italiana e traduttore di Dante.

Nell'anno 1829 la famiglia CAYLEY abbandonò la Russia, e prese domicilio a Blackheath presso Londra. Ivi ARTURO incominciò gli studi in una scuola privata, ed alla età di 14 anni fu mandato al King's College di Londra per continuarli. Il direttore del Collegio riconosciuta dopo breve tempo l'attitudine singolare del giovane allievo agli studi matematici, consigliava al padre di fargli abbandonare la carriera commerciale per seguire i corsi dell'Università di Cambridge, ed il consiglio essendo stato accolto, ARTURO era ammesso nel Trinity-College all'età inusitata di diciassette anni. Ne esciva

*) [Di questa Necrologia fu pubblicata una traduzione francese sotto il titolo: *Notice sur* CAYLEY, nel Bulletin des Sciences Mathématiques, s. II, t. XIX (1895), pp. 189-200].

**) Di alcune notizie sulla vita di CAYLEY sono debitore alla cortesia del prof. FOSTER di Cambridge, Socio straniero di questa Accademia. Altre le conobbi leggendo un ottimo scritto del prof. SALMON pubblicato nel periodico inglese *Nature* [t. XXVIII (1883), pp. 481-485].

nel 1842 coi massimi gradi ottenuti negli studi classici e nei matematici; che se (leggesi in una sua biografia) il nome di CAYLEY non si ricorda fra quei giovani che si illustrarono nella ginnastica, pure è noto che egli fu uno dei più attivi fra i componenti del club Alpino, e si mantenne tale per lunghi anni. Le prove felici date da CAYLEY in questo periodo valsero a lui nello stesso anno 1842 d'essere eletto *Fellow* in quel Trinity-College, dal quale era appena uscito; posizione la quale non potè occupare che per alcuni anni, non avendo voluto prendere gli ordini sacri. Rendevasi perciò necessario al CAYLEY di scegliere una professione più rimunerativa di quella delle matematiche, ed infatti tosto dopo ottenuto il grado di *Master*, egli entrava nello studio dell'eminente notajo *(Conveyancer)* signor CRISTIE di Londra. Raccontasi che nel domandare questo impiego il CAYLEY non fece parola della sua splendida carriera universitaria, e che il signor CRISTIE fu profondamente maravigliato quando conobbe la vera situazione del richiedente. Il CAYLEY divenne ben presto l'alunno favorito dello studio CRISTIE, e vide la sua posizione finanziaria stabilita sopra solide basi. Rimase in questo studio per quattordici anni, dall'anno 1849 al 1863; ed è invero degno di nota, che la parte dell'opera scientifica del CAYLEY compiuta in questo periodo di tempo sarebbe sufficiente da sola a rendere il suo nome imperituro.

Nell'anno 1863 una intelligente e benefica signora, Lady SADLER, lasciava morendo una cospicua somma per la istituzione presso la Università di Cambridge di una cattedra, il titolare della quale doveva istruire nelle matematiche pure ed applicare il proprio ingegno al progresso della scienza. L'Università di Cambridge fu ben lieta di offrire la cattedra a CAYLEY, ed egli non dubitò di abbandonare la posizione sempre più lucrativa che teneva in Londra, per dedicarsi completamente alle matematiche. Nello stesso anno 1863 prese moglie, e venne in Cambridge ad abitare quella modesta ma pur ridente casa sulla sponda del fiume Cam, ove alcuni fra noi lo visitarono ed ebbero amichevole accoglienza.

Moriva il dì 26 dello scorso mese di gennaio, sofferente da qualche tempo di una malattia di vescica. Lascia la vedova e due figli che egli amava assai, e dai quali era contraccambiato di pari affetto. Le più importanti istituzioni scientifiche inglesi si fecero rappresentare ai suoi funebri da uomini eminenti.

Il motto prediletto dal CAYLEY « *potius esse quam videri* » dà una immagine chiara delle sue qualità morali; ma per giudicare di esse nei rapporti con altri Geometri, nessuna migliore testimonianza io potrei dare che ripetendo qui alcune parole pronunciate dal signor HERMITE nella seduta del 4 febbraio scorso all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia:

« *J'ai eu une part dans quelques-unes des recherches de M.* CAYLEY; *les mêmes questions nous avaient rapprochés au commencement de notre carrière, et le souvenir me* « *restera à jamais de sa bonté, de sa grande simplicité, de son entier dévouement à la Science.*

« Je joins ce souvenir, qui m'est bien cher, à mes douloureux regrets, à l'hommage que « j'adresse à sa mémoire » *).

L'opera scientifica di CAYLEY è così prodigiosa, così vasta, che il riassumerla non è facile. Trattasi di circa ottocento memorie e di un libro, un trattato sulla teoria delle funzioni ellittiche. I *Collected Mathematical Papers,* il più degno monumento che i Sindaci dell'Università di Cambridge potessero elevare alla memoria dell'illustre Geometra, raggiungono già il numero di sette volumi, ed altri cinque saranno almeno necessari per raccogliere gli scritti del CAYLEY. E per quanto sia vero che il CAYLEY in questi scritti è ritornato più e più volte sullo stesso argomento, e per quanto nel metodo, nella forma, non esista differenza fra essi, giacchè questo metodo, questa forma è tutta sua del CAYLEY ed i risultati ottenuti ne dimostrano la singolare potenza; pure una classificazione è necessaria prima di entrare nell'esame dei medesimi. Classificazione opportuna a me pare questa: dapprima i lavori che si riferiscono alla teoria delle forme; poi quelli relativi alle funzioni ellittiche ed alle iperellittiche; in terzo luogo i lavori geometrici; infine quelli di meccanica razionale. Sfuggono bensì a questa classificazione alcuni pochi lavori di analisi, integrali definiti, integrazione di equazioni; ma l'importanza loro non può porsi a confronto con quella dei moltissimi compresi in quelle quattro classi. Il tempo poi a sua volta, come per l'individuo, così per le manifestazioni del pensiero, si incarica di distinguere quanto vi ha di più o di meno vitale.

La prima delle indicate classi si estende a tutti i lavori del CAYLEY sui determinanti, sulle trasformazioni lineari, sugli iperdeterminanti, sulle quantiche, ed in complesso sopra gli argomenti che oggi si comprendono nella denominazione di teoria delle forme. Il primo lavoro del CAYLEY è dell'anno 1841, mentre era ancora allievo nel Trinity College. Il titolo di esso è geometrico: *Sopra un teorema nella Geometria di posizione* **); ma il teorema riguarda la moltiplicazione dei determinanti, e la ricerca geometrica, cioè la relazione esistente fra le distanze di cinque punti nello spazio, è una applicazione di quel teorema. Appare già in questo giovanile scritto quella forma elegante, simmetrica, che è la predominante caratteristica di ciascun lavoro del CAYLEY.

La teorica dei determinanti occupò a più riprese la mente del CAYLEY, ed egli pel primo fece conoscere le proprietà di quella classe speciale di determinanti da lui denominati gobbi, e gobbi simmetrici, ed applicò con molto successo quelle proprietà al problema della trasformazione delle funzioni quadratiche *in sè stesse* per mezzo di sostituzioni lineari.

Dalle due memorie degli anni 1845, 1846, che portano il titolo: *Sulla teoria delle*

*) HERMITE, *Notice sur* M. CAYLEY [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXX (1895), pp. 233-234].

**) [The Cambridge Mathematical Journal, t. II (1841), pp. 267-271].

trasformazioni lineari *), pubblicate dapprima nel *Giornale di matematiche di Cambridge* e riprodotte nel *Giornale di* CRELLE col titolo: *Memoria sopra gli Iperdeterminanti* **), ebbero principio quelle ricerche sulle proprietà *invariantive* di alcune funzioni algebriche, che di tanto allargarono il dominio dell'Algebra da indurre il prof. SALMON a scrivere: *essere da questa scoperta del* CAYLEY *che ha origine la nuova Algebra.*

Se non che quando il SALMON esprimeva questo giudizio tanto conforme al vero, il concetto di *invarianza* non erasi ancora esteso ad altre parti della analisi, mentre oggi può dirsi che pressochè tutti i progressi fatti in questa seconda metà del secolo in ogni ramo dell'analisi, furono dovuti alla estensione data a quel concetto.

Il CAYLEY nelle citate memorie ricorda come il BOOLE avesse già riconosciuto che il discriminante è un invariante, ed avesse calcolato pel primo l'invariante cubico di una forma biquadratica; come inoltre alcune proprietà invariantive delle forme ternarie cubiche fossero state stabilite da HESSE.

La teoria degli iperdeterminanti richiamò altre volte l'attenzione di CAYLEY, ma fu specialmente nell'anno 1854 che per opera sua e di altri geometri, che verrò nominando, la teoria delle forme assunse carattere di speciale disciplina. Adottate dal CAYLEY le denominazioni di covarianti e di invarianti introdotte nell'Algebra dal prof. SYLVESTER, il primo in una memoria del 1854 stabiliva le equazioni differenziali alle quali devono soddisfare quelle forme algebriche; ed in questo stesso anno incominciava quella serie di memorie col titolo comune: *Sopra le quantiche* ***), le quali costituiscono da sole un trattato sull'argomento. La parte che spetta ai due eminenti geometri SYLVESTER ed HERMITE nella creazione di una teoria così feconda, i lavori contemporanei od appena successivi di SALMON e di ARONHOLD, la contribuzione di altri geometri, trovansi con molta cura ed erudizione esposte in una recente pubblicazione ****) ed il ritornare su di esse mi allontanerebbe troppo dal tema speciale. Una sola osservazione parmi opportuna aggiungere, ed è che i lavori del CAYLEY e del SYLVESTER di quel periodo di tempo si risentono delle frequenti orali comunicazioni dei due giovani matematici residenti l'uno e l'altro in Londra; e per ciò non è agevole il riconoscere a quale di essi debbasi in qualche caso la prima ispirazione. Le scoperte: *della legge di reciprocità, dell'invariante del diciottesimo grado della quintica, dei criteri relativi alle radici reali od imma-*

*) The Cambridge Mathematical Journal, t. IV (1845), pp. 193-209; The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, t. I (1846), pp. 104-122].

**) [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXX (1846), pp. 1-37].

***) [Philosophical Transactions of the R. Society of London, 1854, pp. 244-258; 1856, pp. 101-126; 1856, pp. 627-647; 1858, pp. 415-427; 1858, pp. 429-460; 1859, pp. 61-90; 1861, pp. 277-292; 1867, pp. 513-554; 1871, pp. 17-50; 1878, pp. 603-661].

****) FRANZ MEYER, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, t. I (1890-91), pp. 79-292].

ginarie determinati da invarianti, dei covarianti associati, rimangono interamente dovute ad HERMITE.

Fondata la teoria, l'applicazione di essa a vari problemi dell'algebra non ebbe ritardo. Il problema della eliminazione, delle funzioni simmetriche, quello delle funzioni di STURM, infine, il più importante, quello della trasformazione delle equazioni algebriche, attirarono tosto l'attenzione del CAYLEY e di altri geometri.

Fu nell'anno 1858 che HERMITE fece conoscere la formola generale di trasformazione delle equazioni algebriche, per la quale i coefficienti dell'equazione trasformata risultano invarianti della primitiva equazione. Il CAYLEY, addottando quella formola, la applicava con ottimo successo alle equazioni di terzo, quarto, quinto grado, dapprima nei suoi quattro lavori col titolo: *Sulla trasformazione di* TSCHIRNHAUSEN *); quindi in altri: *Sulla trasformazione di* JERRARD **).

Il problema della determinazione del numero degli invarianti, e dei covarianti indipendenti per una data forma binaria, fu oggetto di lunga e ripetuta meditazione pel CAYLEY; e sebbene egli non sia riuscito a risolverlo nella sua generalità, pure le relative ricerche sulla *Partizione dei numeri* ***) sono di grande valore. Questo problema stava a lui così a cuore, che allorquando il GORDAN dimostrò che il numero di quelle forme era finito, e ne calcolò il numero stesso per le forme dei primi gradi, il CAYLEY riferì questo importante risultato alla British Association radunatasi in Edimburgo nel 1871 †) e vi dedicò la nona memoria sulle *Quantiche* ††); e più di recente, nel 1889, il lavoro di HILBERT sullo stesso argomento lo condusse ad occuparsene di nuovo †††).

La formola di eliminazione o quella pel risultante di due forme binarie, che oramai è adottata nell'analisi sotto il nome di formola di CAYLEY, alla sua importanza come risultato, altra ne acquistò per avere essa condotto, per opera di GORDAN, alla calcolazione del risultante in funzione di invarianti simultanei.

La nuova Algebra creata specialmente per opera del CAYLEY ha già preso possesso di tanti rami delle matematiche, che se l'attività del suo genio si fosse anche arrestata quì, l'ammirazione dei geometri gli era dovuta.

Ma la teoria delle funzioni ellittiche dapprima, quella delle iperellittiche più tardi,

---

*) [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LVIII (1861), pp. 259-262, 263-269; Philosophical Transactions, 1862, pp. 561-578; 1866, pp. 97-100].

**) [Philosophical Magazine, t. XXI (1861), pp. 210-214; t. XXIV (1862), pp. 290].

***) [Philosophical Transactions, 1856, pp. 127-140; Philosophical Magazine, t. XIII (1857), pp. 245-248].

†) [Report of The British Association for the Advancement of Science, t. XLI (1871), (sect.) pp. 9-10].

††) [Philosophical Transactions, 1871, pp. 17-50].

†††) [Mathematische Annalen, t. XXXIV (1889), pp. 319-320].

ebbero da lui nuova luce. Nei primi lavori sulle funzioni ellittiche, benchè pregevoli, specialmente quelli relativi alla equazione differenziale di JACOBI per la trasformazione, pure l'impronta originale del CAYLEY non appare chiara, quanto nel lavoro del 1858 che ha per titolo: *Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques* *). Colla nota trasformazione dovuta ad HERMITE e colle formole contenute in questo scritto, tutti gli elementi pel passaggio dall'integrale di JACOBI e di ABEL a quello di WEIERSTRASS sono determinati. La trasformazione delle funzioni ellittiche fu più volte considerata dal CAYLEY, ed alle sue prime Memorie pubblicate nelle *Philosophical Transactions* degli anni 1874, 1878 **), fa seguito la più recente che trovasi nei Volumi IX e X dell'*American Journal of Mathematics* ***). Nelle une e nell'altra egli prende le mosse dalla formola di trasformazione di JACOBI e con quella abilità di calcolazione, che era a lui particolare, presenta sotto nuove forme le equazioni modulari, e rileva le proprietà di alcune curve da esse rappresentate.

Nell'inverno dell'anno 1882 il CAYLEY fu invitato a dare una serie di letture nella Università JOHNS HOPKINS di Baltimora, ed avendo egli accettato, sviluppò nelle medesime da un nuovo punto di vista la teoria delle funzioni Abeliane di CLEBSCH e GORDAN pubblicata nel 1866; le quali letture trovansi raccolte nei Vol. V e VII dell'*American Journal of Mathematics* ****). È questo, a mio avviso, uno dei lavori più meditati del CAYLEY, sebbene lo studio di esso presenti qualche difficoltà per una notazione alquanto complicata.

Allo studio delle proprietà delle funzioni theta dedicava il CAYLEY una serie di lavori. Incominciati nel 1877 colla memoria: *Sulle funzioni theta doppie in relazione ad una superficie a sedici nodi* †); negli anni 1879, 1880 comparvero: nelle *Philosophical Transactions*, la importante memoria: *Sulle singole e doppie funzioni theta* ††), ed in due volumi del *Giornale di matematiche di* BORCHARDT quelle: *Sulle doppie e sulle triple funzioni theta* †††).

È inutile il ripetere che il metodo originale del CAYLEY di considerare i vari aspetti dei problemi da lui studiati predomina in tutti quegli scritti; che se ciò deve ascriversi a merito suo, è però d'altra parte una conseguenza di questo fatto la non

*) [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LV (1858), pp. 15-24].

**) [1874, pp. 397-456; 1878, pp. 419-424].

***) [t. IX (1887), pp. 193-224; t. X (1888) pp. 71-93].

****) [t. V (1882), pp. 137-179; t. VII (1885), pp. 101-167].

†) [Journal für die reine und angewandte Matematik, t. LXXXIII (1877), pp. 210-219].

††) [Philosophical Transactions, 1880, pp. 897-1002].

†††) [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXVII (1879), pp. 74-81, 134-138, 165-169, 190-198; t. LXXXVIII (1880), pp. 74-81].

corrispondente influenza che essi ebbero nel movimento normale di questa parte delle matematiche.

Coi lavori citati non si compie certamente la indicazione di tutta l'opera del CAYLEY sulle funzioni ellittiche, o sulle iperellittiche. Ma pur rimanendo nei limiti che mi sono prefisso, non devesi dimenticare l'unico libro da lui pubblicato: *An elementary Treatise on Elliptic Functions* edito nel 1876 *). In questo libro egli adotta la notazione dei *Fundamenta nova* di JACOBI ed espone le varie parti della non facile teoria con chiarezza singolare, con rigore di dimostrazione, da rendere il trattato di vera utilità per coloro che si iniziano allo studio della medesima. Al momento della sua pubblicazione, dieci anni prima del grande trattato di HALPHEN, il CAYLEY, col suo libro, diede un ottimo esempio.

Esaminando i sette volumi dei *Mathematical Papers* finora pubblicati, ed i lavori del CAYLEY che comporranno gli altri cinque, appare chiaro che i problemi geometrici esercitavano su di lui una grande attrattiva. Può anzi dirsi che per lui, come per qualche altro fra i più eminenti geometri, a ciascun nuovo risultato ottenuto nella analisi rispondesse un nuovo risultato geometrico, e reciprocamente. E ciò spiega per quali ragioni sopra una stessa quistione geometrica egli ritornasse più volte, e vi ritornasse appunto quando scoperte analitiche di sorgente specialmente propria, od anche d'altri, prestavano a lui uno strumento più potente di indagine.

Nell'anno 1844 egli pubblica una prima memoria: *Sulle curve piane del terzo ordine* **), ed è tosto seguita da un'altra nel 1845 ***); varie nuove proprietà di quelle curve vi sono dimostrate, ma il metodo di ricerca è indiretto. È lo studio delle forme ternarie cubiche, la scoperta dei loro invarianti, covarianti, contravarianti, che offrono i nuovi mezzi per penetrare più addentro nelle proprietà di quelle curve, ed il CAYLEY nella sua bella Memoria delle *Philosophical Transactions* della Società Reale di Londra del 1857 †), riprende di nuovo l'argomento, e lascia nel medesimo traccie durevoli. È infatti in questa Memoria che appare per la prima volta quella curva che porta il suo nome.

La memoria del 1847: *Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes* ††), alla quale fa seguito l'altra del 1864 collo stesso titolo †††), sono un secondo esempio

*) [Cambridge, 1876, pp. XI-384; tradotto in italiano con appendici da F. BRIOSCHI, Milano, 1880, pp. XV-449].

**) [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), pp. 285-293].

***) [Ibid., t. X (1845), pp. 102-109].

†) [Philosophical Transactions, 1857, pp. 415-446].

††) [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXIV (1847), pp. 30-45].

†††) [Ibid., t. LXIII (1864), pp. 34-39; t. LXIV (1865), pp. 167-171].

del legame che per lui esisteva fra il progresso nella teoria delle forme e quello relativo alle proprietà degli enti geometrici; ed in quella prima memoria, di certo fra le migliori, egli stesso lo afferma colle parole: « *Mon but a été ici de donner une idée pré-* « *cise des théorèmes à démontrer, pour former une théorie toute analytique des polaires réci-* « *proques; je n'ai fait qu'avancer ces théorèmes (sans chercher à les démontrer) pour faire* « *voir leur liaison avec la théorie de l'élimination et avec celle des hyperdéterminants; c'est* « *à cette dernière en particulier, qu'il faut etc. etc.* ».

Le ricerche di CAYLEY sulle tangenti doppie di una quartica sono precedute dalla memoria del 1859: *Sulle tangenti doppie di una curva piana* *). Già il numero di quelle tangenti era stato determinato da PLÜCKER e da JACOBI; ed HESSE aveva trovato l'equazione del quattordicesimo ordine che sega la quartica nei punti di contatto delle sue tangenti doppie; quando in una Nota del 1858: *On the Double Tangents to Plane Curves* **) il SALMON poneva la soluzione del problema sopra altre basi. Il CAYLEY nella menzionata memoria prende a trattare di nuovo il problema nella sua generalità seguendo le traccie di SALMON; e con una abilità di calcolo non superabile, giunge alla soluzione completa del problema per curve di grado qualsivoglia. Forse questo lavoro non è abbastanza conosciuto ed apprezzato, ed egli in parte vi contribuiva, abbandonando nella sua memoria del 1883: *On the Bitangents of a Plane Quartic* ***), il metodo precedente, per quello, speciale alle quartiche, iniziato da RIEMANN e sviluppato più tardi da WEBER.

Le singolarità delle curve piane, la corrispondenza di punti nelle medesime, la classificazione delle curve nello spazio, sono argomento di varie memorie del CAYLEY; le precipue fra le quali trovansi degnamente esaminate in una recente pubblicazione dovuta a BRILL ed a NOETHER †).

Colla memoria del 1849: *Sui piani triplo-tangenti di una superficie del terzo ordine* ††), il CAYLEY dava principio alle sue ripetute ricerche sulle proprietà geometriche delle superficie. La rappresentazione analitica dei quarantacinque piani triplo-tangenti contenuta in quella memoria, iniziò altri lavori sull'argomento, specialmente in Inghilterra; e dopo il lavoro di SALMON sulla teoria delle superficie reciproche, e quello di SCHLÄFLI relativo alla classificazione delle superficie del terzo ordine, il CAYLEY stesso nella sua

---

*) [Philosophical Transactions, 1859, pp. 193-212].

**) [Philosophical Magazine, serie V, t. XVI (1858), pp. 318-319]. Vedi anche il *Treatise on the Higher Plane Curves* di SALMON, la prima edizione del quale è del 1852.

***) [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XCIV (1883), pp. 93-115].

†) *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit* (Abs. VI, X) [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, t. III (1892-93)].

††) [The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, t. IV (1849), pp. 118-132].

grande memoria del 1869: *A Memoir on Cubic Surfaces* *), può dirsi avere esaurito, nel campo analitico, il soggetto.

La superficie di quarto ordine di STEINER, intorno la quale scrissero importanti lavori KUMMER, WEIERSTRASS, CREMONA, e SCHRÖTER; la superficie pure di quarto ordine che porta il nome di KUMMER; la superficie delle onde che ha rapporti colla precedente; e più specialmente quest'ultima, occuparono più volte il CAYLEY. La ricerca della equazione delle linee di curvatura della superficie delle onde, mentre fu tema di un suo scritto giovanile **), lo fu anche di uno degli ultimi, e questo lavoro ebbi la fortuna di pubblicare l'anno 1892 negli *Annali di Matematica* ***).

Alla teoria generale delle quartiche dotate di nodi, dedicava inoltre tre memorie negli anni 1869-1871 †).

L'opera del CAYLEY nella teoria delle superficie estendesi ancora sia alle loro singolarità, sia a speciali superficie, ad esempio alle superficie gobbe, contribuendo, con uno dei più stimati lavori del CREMONA, alla loro classificazione. Ma dove egli, dalla teoria delle forme, fu condotto a nuove ed originali indagini, si è nei molti lavori sulle superficie sviluppabili.

Il problema dei poligoni inscritti e circoscritti a coniche, al quale il CAYLEY dedicò dieci o dodici brevi memorie, ebbe da lui quella nuova soluzione analitica che può dirsi avere acquistato maggior valore dalla nota polemica col PONCELET. Infine a questo ordine di lavori debbonsi ascrivere tre Note sulla rappresentazione geometrica di alcuni integrali ††).

Non vi è parte della Geometria sulla quale la mente del CAYLEY non siasi rivolta, e non vi abbia impresso traccia del suo genio. Al molto già sopra riferito devonsi infatti aggiungere i lavori sulla geometria di posizione, quelli sulla geometria a più dimensioni, sulla geometria non Euclidea, sulla Gaussiana, ed altri ancora.

Ma allorquando si rivolge l'attenzione ai numerosi scritti del CAYLEY relativi alla Dinamica ed alla Meccanica celeste, il senso di maraviglia per la sua instancabile attività si accresce a più doppi. In primo luogo egli rese un segnalato servizio alla storia della Meccanica razionale colle due eccellenti relazioni: *On the recent Progress of Theoretical Dynamics* presentate alle due riunioni dell'Associazione Britannica, l'una nel 1857, l'altra nel 1862 †††). La prima di esse, la quale prendendo le mosse dalla Meccanica

*) [Philosophical Transactions, 1869, pp. 231-326].

**) [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XI (1846), pp. 291-296].

***) [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. XX (1892-93), pp. 1-18].

†) [Proceedings of the London Mathematical Society, t. III (1869-71), pp. 19-69, 198-202, 234-266].

††) [Philosophical Magazine, t. V (1853), pp. 281-284; t. VI (1853), pp. 103-105; t. VI (1853), pp. 414-418].

†††) [Report of the British Association, 1857, pp. 1-42; Ibid., 1862, pp. 184-252].

analitica di LAGRANGE, segue passo passo, con chiarezza di esposizione, e con rigore di citazioni, quei rapidi progressi che nella prima metà di questo secolo impressero alla dinamica POISSON, JACOBI, HAMILTON, BERTRAND, BOUR ed altri; è il migliore scritto che oggi ancora può leggersi da coloro i quali si iniziano a questi studi.

CAYLEY erasi da tempo preparato a questi lavori storici, avendo ancora giovanissimo una larga coltura in questo ramo delle matematiche, ed avendo in più occasioni trattato problemi di dinamica. Il suo primo lavoro di dinamica: *On the Motion of Rotation of a Solid Body* *) è dell'anno 1843, ed è in esso che per la prima volta sono opportunamente introdotte in questo problema quelle eleganti formole di OLINDE RODRIGUES per determinare le posizioni di due terne di assi ortogonali. Nel 1846, indottovi dalle scoperte di JACOBI in allora recenti, prese di nuovo a trattare il problema del movimento di un corpo attorno ad un punto fisso, nella ipotesi che l'origine delle coordinate sia nel punto stesso; e colla introduzione di due speciali funzioni, di semplice interpretazione geometrica, riduceva la soluzione del problema, nel caso particolare fosse nulla la funzione delle forze, a due quadrature; ed estendeva il problema alla sua generalità colla variazione delle costanti arbitrarie.

Dopo alcuni minori scritti sulla teoria lunare di HANSEN, sulle soluzioni del problema dei tre e dei più corpi di JACOBI e di HAMILTON, il CAYLEY colle sue importanti memorie del 1859 e del 1862: *On the Problem of disturbed Elliptic Motion* **), *On the Development of the Disturbing Function in the Lunar Theory* ***), *Disturbing Function in the Lunar and Planetary Theories* †), *On the secular Acceleration of the Moon's mean Motion* ††), dava principio a quella serie di lavori nella Astronomia e nella Meccanica celeste, che gli valsero fama fra gli Astronomi, e la nomina nel 1866 a membro del *Board of Visitors* dell'Osservatorio di Greenwich.

Anche in questi, come in tutta l'opera del CAYLEY, due qualità sono dominanti; dapprima la conoscenza esatta di quanto era già stato pubblicato sull'argomento, poi il metodo costante ed originale di presentare le soluzioni proprie od anche soluzioni già note. Ed è (per indicare un primo esempio) da questo studio coscenzioso dei lavori altrui, che egli fu tratto ad accorgersi della ommissione di un fattore in alcune formole della *Teoria della Luna* di PLANA, causa di alcune discrepanze fra esse ed i risultati di PONTÉCOULANT e DELAUNAY.

L'attrazione di una elissoide sopra un punto esterno, problema più volte trattato

*) [Cambridge Mathematical Journal, t. III (1843), pp. 224-232].

**) [Memoirs of the R. Astronomical Society of London, t. XXVII (1859), pp. 1-29].

***) [Ibid., pp. 69-95].

†) [Ibid., t. XXVIII (1860), pp. 187-215, 217-234].

††) [Monthly Notices of the Astronomical Society of London, t. XXII (1862), pp. 171-230].

dal CAYLEY, porge un secondo esempio meritevole di nota. Cinque scritti suoi sull'argomento sono dedicati alle soluzioni di LEGENDRE, di JACOBI, di LAPLACE, di GAUSS, di RODRIGUES; poi dà egli stesso soluzioni nuove, nelle quali lo studio degli integrali definiti multipli, connessi al problema, ha parté principale ed importante.

CAYLEY fu giudicato, alcuni anni or sono, dal suo stimato allievo GLAISHER — il più grande maestro d'algebra vivente — e questo giudizio fu approvato da quell'eminente geometra, che fu suo collaboratore, il SALMON.

Giunto però a questo punto, dopo che il rapido esame da me fatto della maggior parte dell'opera sua, ha ridestato in me la chiara ricordanza della grande influenza che quest'opera ebbe ad innalzare le matematiche al punto nel quale oggi si trovano; è mia opinione che il nome di ARTURO CAYLEY rimarrà nella storia della scienza, siccome quello di uno fra i più perspicaci e fecondi innovatori in molti rami di essa. Ed a questi innovatori, da quasi mezzo secolo, sarebbe ingiustizia il non riconoscere la parte d'onore che ad essi spetta nelle scoperte dell'oggi.

La stima grandissima, che io ebbi sempre per l'ingegno del CAYLEY, mi indusse a scrivere queste pagine, le quali vorrei potessero dirsi degne di dedica alla memoria di lui.

3 marzo 1895.

CLVIII.

CENNO NECROLOGICO SU LODOVICO SCHLÄFLI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, volume IV (1895, 1° sem.), pp. 310-312.

Ho di nuovo il doloroso còmpito di annunziare all'Accademia la perdita di un Socio straniero nella Sezione delle Matematiche.

Il chiaro Geometra LODOVICO SCHLÄFLI moriva in Berna la mattina del dì 20 dello scorso Marzo. I professori, gli scolari di quella Università, la cittadinanza tutta, tributarono alla memoria di lui i maggiori onori, rimeritando così la feconda opera sua di insegnante e di scienziato.

Nato il 15 gennaio 1814 a Grasswyl, piccolo comune del Cantone di Berna, dalla sua prima giovinezza SCHLÄFLI diede singolari prove di attitudine alle scienze matematiche ed alle filologiche. Fondata nell'anno 1834 l'Università di Berna, appartenne alla facoltà Teologica fino al 1838, nel quale anno fu ordinato pastore. Ma contemporaneamente egli continuava da sè lo studio delle matematiche superiori, ed abbandonato l'ufficio di pastore, accettò di insegnare matematica e scienze naturali nel proginnasio di Thun, ove rimase fino al 1847. In questo anno si abilitò come privato docente nell'Università di Berna, nel 1852 vi fu nominato professore straordinario e nel 1872 promosso ad ordinario. Nel 1891, all'età di 77 anni, già da qualche tempo sofferente di salute, chiese il riposo.

Lo SCHLÄFLI accoppiava ad una vasta coltura matematica le cognizioni di un filologo e di un botanico. Poteva scrivere correttamente in tedesco, in italiano, in francese ed inglese, come lo dimostrano i suoi lavori matematici.

Fu più volte in Italia ospite costante di un nostro compianto carissimo collega, il

CASORATI; ed aveva fra noi amici ed ammiratori della sua lucida mente e delle sue modeste abitudini. Ma il suo primo viaggio nel nostro paese, nel 1847, merita speciale menzione, essendo venuto in Roma in compagnia di JACOBI, di DIRICHLET, e di BORCHARDT.

I primi lavori dello SCHLÄFLI rimontano agli anni 1846, 1847; appartengono alla geometria differenziale, e furono pubblicati in un periodico di Berna. Ma il lavoro che acquistò ben presto a lui fama di insigne matematico, si è quello sulla eliminazione, o sopra il risultante di un sistema di equazioni algebriche, pubblicato nel 1852 negli *Atti dell'Accademia di Vienna* *). Rileggendo ancora negli scorsi giorni quella importante Memoria, parmi poter affermare che già nella medesima si rinvengono le qualità predominanti in tutta l'opera dello SCHLÄFLI, e cioè, dapprima conoscenza profonda, completa, dei lavori altrui sull'argomento, poi tendenza e facilità nel generalizzare i risultati, perspicacia somma nell'esaminare i problemi sotto i vari loro aspetti.

Tutti i periodici matematici di Europa, i Giornali di CRELLE e di LIOUVILLE, il *Quarterly Journal*, i *Mathematische Annalen*, gli *Annali di Matematica*, contengono memorie dello SCHLÄFLI, e inoltre i *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* di Parigi e le *Philosophical Transactions* della Società Reale di Londra.

Agli *Annali di Matematica* egli dedicò importanti suoi lavori sopra svariati argomenti. Non è mio intendimento di addentrarmi in un esame dei medesimi, come degli altri pubblicati altrove; ma oggi ancora rammento la grata impressione nel leggere la memoria: *Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di* RICCATI **), l'altra che ha per titolo: *Sugli spazi di curvatura costante (Nota ad una memoria del prof.* BELTRAMI) ***), infine quella: *Sopra un teorema di* JACOBI *recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica* ****). Quest'ultimo lavoro è connesso agli altri di molto valore sulle funzioni di BESSEL e di HEINE, pubblicati in alcuno degli indicati Periodici.

SCHLÄFLI non ebbe altro pensiero, altro amore nella sua vita, che per la scienza e per l'insegnamento. Uno dei suoi scolari scrivevami giorni sono: « *Questi (gli scolari)* « *che erano la sua famiglia, possono dire quale spirito di abnegazione e di sacrificio,* « *quale tesoro di affetti, fossero nell'animo del loro maestro* ». E di questa abnegazione

---

*) *Ueber die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Elimination.* [Denkschriften der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien, t. IV (1852), (Abth. 2), pp. 1-74].

**) [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. I (1867-68), pp. 232-242].

***) [Ibid., t. V (1871-73), pp. 178-193].

****) [Ibid., t. V (1871-73), pp. 199-205].

diede prova allorquando invitato ad assumere una cattedra in altra Università, con sensibile vantaggio nelle condizioni pecuniarie, rifiutò, per non abbandonare la patria, e la famiglia dei suoi scolari.

Al lutto dell'Università di Berna per la morte dell'eminente scienziato si associa di cuore la R. Accademia dei Lincei.

7 aprile 1895.

CLIX.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLE FORME BINARIE E DEGLI INTEGRALI CORRISPONDENTI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, volume IV (1895, 1° sem.), pp. 363-369.

1. È nota da vari anni, pei lavori dei Sigg. WEIERSTRASS e HERMITE, quella trasformazione della forma binaria biquadratica e del corrispondente integrale ellittico, la quale modificava essenzialmente la teoria delle funzioni ellittiche. Ma i metodi adottati dai due eminenti geometri sopra nominati, e da altri che successivamente si occuparono dello stesso argomento, per giungere a quella trasformazione, avendo di mira il problema speciale, non si prestano a generalizzazione.

Nel breve scritto che oggi presento all'Accademia espongo un metodo di trasformazione, pel quale l'accennata limitazione più non esiste, ed il caso della forma biquadratica rientra in quello di una forma binaria qualsivoglia d'ordine pari. Le linee generali di questo metodo trovansi già in una mia comunicazione all'*Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia* di molti anni ora sono *); ma in allora le mie ricerche erano più specialmente rivolte alle forme ternarie e perciò non mi occupai delle binarie che incidentalmente.

Indicando con $f(y_1, y_2)$ una forma binaria d'ordine n pari, e ponendo

$$f(y_1 z_1 - f_2 z_2, y_2 z_1 + f_1 z_2) = f(y_1, y_2) \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)(z_1, z_2)^n,$$

*) *Extrait d'une lettre à M.* HERMITE [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVI (1863), pp. 659-663].

nella quale $f_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial y_1}$, $f_2 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial y_2}$; i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ della trasformata sono, come è noto, covarianti della $f(y_1, y_2)$, e precisamente, se con $h, k, A, \ldots t, g, \ldots$ si rappresentano i covarianti:

$$h = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \quad k = \tfrac{1}{2}(ff)_4, \quad A = \tfrac{1}{2}(ff)_6,$$
$$t = 2(fh), \quad g = 2(fk), \quad \text{ecc.}$$

sono:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = h, \quad \alpha_3 = t, \quad \alpha_4 = f^2 k - 3h^2, \\ \alpha_5 = f^2 g - 2ht, \quad \alpha_6 = f^4 A - 15 f^2 hk + 45 h^3 + 10 t^2, \ldots \end{cases}$$

valori che già trovansi nel trattato sulla teoria delle forme di CLEBSCH e in quello di GORDAN *).

Sia $\varphi(y_1, y_2)$ un covariante di $f(y_1, y_2)$ dell'ordine m; e posto

$$\varphi_1 = \frac{1}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2},$$

si consideri la seconda trasformazione:

$$(2) \qquad f(y_1 z_1 - \varphi_2 z_2, y_2 z_1 + \varphi_1 z_2) = (A_0, A_1, \ldots A_n)(z_1, z_2)^n.$$

I coefficienti $A_0, A_1, \ldots A_n$ sono essi pure covariati dalla forma f, e si hanno:

$$A_0 = f, \quad A_1 = -(f\varphi),$$

mentre i valori degli altri coefficienti $A_2, A_3, \ldots A_n$, si deducono dalla formola generale:

$$(3) \qquad f^{r-1} A_r = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r)(A_1, \varphi)^r,$$

nella quale $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ hanno i valori superiori.

2. Consideriamo i due casi di $n = 4$, $n = 6$ e tanto per l'uno che per l'altro caso supponiamo che il covariante φ sia eguale ad h, e quindi $m = 4$ nel primo di essi, $m = 8$ nell'altro; ed $A_1 = -\frac{1}{2}t$ nei due casi. Per $n = 4$ saranno:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = h, \quad \alpha_3 = t, \quad \alpha_4 = g_2 f^2 - 3h^2,$$

*) CLEBSCH, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872), pag. 337.—GORDAN, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, t. II (Leipzig, 1887), pag. 357.

essendo $k = g_2$ l'invariante di secondo grado della biquadratica, e si ha la nota relazione:

$$t^2 + 4h^3 = g_2 h f^2 - g_3 f^3,$$

e per essa dalla formola (3) si deducono i valori:

$$A_2 = \tfrac{1}{4} f(g_2 h - g_3 f), \quad A_3 = -\tfrac{1}{8} t(g_2 h - g_3 f), \quad A_4 = g_3 h^3 + \tfrac{1}{16} f(g_2 h - g_3 f)^2.$$

Ora i valori stessi, nella ipotesi che $f(y_1, y_2) = 0$, diventano:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -\tfrac{1}{2} t, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\tfrac{1}{8} g_2 h t, \quad A_4 = g_3 h^3 = -\tfrac{1}{4} g_3 t^2,$$

e ponendo in luogo di z_1 la espressione $\frac{t}{2h} z_1$, la trasformata (2) conduce alla

$$(A_0, A_1, \ldots A_4)\left(\frac{t}{2h} z_1, z_2\right)^4 = \frac{1}{4} t^2 z_2 (4z_1^3 - g_2 z_1 z_2^2 - g_3 z_2^3).$$

Passiamo al caso di $n = 6$. I valori $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_6$ sono dati dalle (1) ed A è in questo caso l'invariante quadratico. È noto che le forme del sesto ordine hanno 26 covarianti ed invarianti, fra i quali sussistono 20 relazioni indipendenti o sizigie. Posto

$$i = \tfrac{1}{2}(kk)_2, \qquad p = (fk)_2, \qquad l = (fk)_4, \qquad m = (lk)_2, \qquad n = (mk)_2,$$

indicando con B, C gli invarianti quadratico e cubico del covariante k, cioè gli invarianti di quarto e di sesto grado di f, e con $D = \frac{1}{2}(mm)_2$ l'invariante del decimo grado, notiamo fra quelle sizigie le seguenti:

$$t^2 + 4h^3 = f^2\left(hk + \tfrac{1}{3} fp - f^2 A\right),$$

$$k^3 - 3p^2 + 12hi = f(lk - fB),$$

$$Ak^2 - 6Bh + 6ki + 3pl = \tfrac{3}{2} fm,$$

$$16i^2 + \tfrac{3}{4} kl^2 + 2Aki - 12Ch = fn,$$

per le quali e per le altre, che si trovano nei lavori dei Sigg. STEPHANOS, STROH ed altri, si hanno pei coefficienti $A_0, A_1, \ldots$, nella ipotesi di $f(y_1, y_2) = 0$, i seguenti valori:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -\tfrac{1}{2} t, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\tfrac{1}{8} kht, \quad A_4 = -\tfrac{1}{3} h^3 p,$$

$$A_5 = \tfrac{1}{12} h^2 t\left(\tfrac{5}{8} k^2 - Ah\right), \qquad A_6 = h^4\left(\tfrac{1}{2} hl + \tfrac{1}{12} kp\right),$$

ed essendo nella data ipotesi $t^2 + 4h^3 = 0$, si giunge alla

$$(A_0, A_1, \dots A_6)\left(\frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}}z_1, z_2\right)^6$$

$$= \frac{1}{4^2}\frac{t}{h^{\frac{3}{4}}}z_2(6z_1^5 - g_2 z_1^3 z_2^2 - g_3 z_1^2 z_2^3 - g_4 z_1 z_2^4 - g_5 z_2^5),$$

essendo

$$g_2 = 5\frac{k}{h^{\frac{1}{2}}}, \qquad g_3 = -5\frac{p}{h^{\frac{3}{4}}}, \qquad g_4 = \frac{5}{8}\frac{k^2}{h} - A, \qquad g_5 = \frac{1}{2}\frac{l}{h^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{12}\frac{kp}{h^{\frac{5}{4}}};$$

ed in conseguenza:

$$k = \tfrac{1}{5}g_2 h^{\frac{1}{2}}, \qquad p = -\tfrac{1}{5}g_3 h^{\frac{3}{4}},$$

$$A = \frac{1}{5.8}g_2^2 - g_4, \qquad l = 2\left(g_5 + \frac{1}{3.4.5^2}g_2 g_3\right)h^{\frac{1}{4}}.$$

Ora, siccome dalle rammentate sizigie, sempre nella ipotesi di $f(y_1, y_2) = 0$, si hanno le

$$4Bh^2 = k(p^2 - \tfrac{1}{3}k^3) + \tfrac{2}{3}Ahk^2 + 2phl,$$

$$12Ch^3 = (p^2 - \tfrac{1}{3}k^3)^2 + \tfrac{1}{2}Ahk(p^2 - \tfrac{1}{3}k^3) + \tfrac{3}{4}kh^2l^2,$$

$$Dh^5 = \left[\tfrac{1}{4}h^2l^2 + \tfrac{1}{6}Ah(p^2 - \tfrac{1}{3}k^3) + \tfrac{2}{3}Bh^2k\right]^2$$

$$- h^2m\left[\tfrac{1}{3}Bh^2p - hl(p^2 - \tfrac{1}{3}k^3) - \tfrac{1}{2}Akh^2l\right],$$

essendo

$$h^2m = p(p^2 - \tfrac{1}{3}k^3) + \tfrac{2}{3}hk(Ap + kl),$$

si giunge al seguente teorema: *I quattro invarianti A, B, C, D della forma binaria del sesto ordine $f(y_1, y_2)$ sono funzioni intiere e razionali dei quattro coefficienti* g_2, g_3, g_4, g_5.

3. Indicando con ρ un fattore di proporzionalità, e posto

$$\rho x_1 = y_1 z_1 - \varphi_2 z_2, \qquad \rho x_2 = y_2 z_1 + \varphi_1 z_2, \tag{4}$$

si avrà per la (2) che

$$\rho^n f(x_1, x_2) = (A_0, A_1, \dots A_n)(z_1, z_2)^n, \tag{5}$$

e siccome per la stessa definizione di invariante, indicando con ψ un invariante di grado m della forma $f(x_1, x_2)$, si ha:

$$\varphi^{\frac{nm}{2}}\psi = \Psi,$$

essendo Ψ lo stesso invariante formato colle A_0, A_1, ..., vedesi tosto come il teorema precedente debba estendersi a forme d'ordine superiore.

Supponendo come sopra $n = 6$, $\varphi = h$, $z_1 = \frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}} z_1$, il modulo della trasformazione diventa $\frac{1}{2} t h^{\frac{1}{4}}$, e quindi:

$$\left(\frac{t^3 h^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^m \psi = \Psi.$$

Ma per $m = 2$, 4, 6, 10 si deducono da quest'ultima:

$$-\left(\frac{t}{4^2 h^{\frac{3}{4}}}\right)^2 \psi = \Psi, \qquad \left(\frac{t^4}{4^2 h^{\frac{3}{4}}}\right)^4 \psi = \Phi, \ldots;$$

per ciò, indicando con $F(z_1, z_2)$ il polinomio

$$(6) \qquad F(z_1, z_2) = z_2(6z_1^5 - g_2 z_1^3 z_2^2 - g_3 z_1^2 z_2^3 - g_4 z_1 z_2^4 - g_5 z_2^5),$$

si avrà che gli invarianti della forma $f(x_1, x_2)$ saranno eguali agli invarianti della forma $F(z_1, z_2)$ col segno cambiato nei casi di $m = 2$, 6, 10. Si ottengono in tal modo le

$$A = \frac{1}{5.8} g_2^2 - g_4, \qquad B = \frac{1}{3.4^2.5^4} g_2^4 - \frac{1}{6.5^2} g_2^2 g_4 + \frac{1}{6.5^3} g_2 g_3^2 + \frac{1}{5} g_3 g_5,$$

e così via; come dalle sizigie sopra indicate.

Dalle relazioni (4) si deduce la

$$\rho^2(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) = \varphi(z_2 dz_1 - z_1 dz_2).$$

Pel caso di $n = 4$, posto, come sopra, $\varphi = h$ e $\frac{t}{2h} z_1$ in luogo di z_1, si ha:

$$\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}},$$

essendo $F(z_1, z_2) = z_2(4z_1^3 - g_2 z_1 z_2^2 - g_3 z_2^3)$; cioè la nota trasformazione dell'integrale ellittico.

Pel caso di $n = 6$, posto $\varphi = h$, $\frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}} z_1$ in luogo di z_1, si giunge alle

$$\frac{x_1(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = (\alpha z_1 + \beta z_2)\frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}},$$

$$\frac{x_2(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = (\gamma z_1 + \delta z_2)\frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}},$$

nelle quali $F(z_1, z_2)$ ha il valore (6) ed

$$\alpha = \frac{y_1}{h^{\frac{1}{8}}}, \qquad \gamma = \frac{y_2}{h^{\frac{1}{8}}}, \qquad \beta = -2\frac{h^{\frac{5}{8}}}{t}h_2, \qquad \delta = 2\frac{h^{\frac{5}{8}}}{t}h_1.$$

4. Supponiamo ora che $f(y_1, y_2)$ non sia eguale a zero. Dalla equazione (5), rammentando la proprietà (3) dei covarianti $A_2, A_3, \ldots$, si deduce la

$$\rho^n f^{n-1}.f(x_1, x_2) = \varphi^n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)(X, 1)^n,$$

posto

$$X = \frac{fz_1 + A_1 z_2}{\varphi},$$

ed f in luogo di $f(y_1, y_2)$.

Suppongo che le z_1, z_2, φ abbiano i seguenti valori:

$$z_1 = \tfrac{1}{2}f^{\frac{1}{2}}z, \qquad z_2 = x, \qquad \varphi = fy + h,$$

e quindi

$$A_1 = -\tfrac{1}{2}t,$$

sarà:

$$X = \frac{1}{2}\frac{f^{\frac{3}{2}}z - t}{fy + h}.$$

Sia $n = 4$, si avrà dalla superiore:

$$\rho^4 f^3.f(x_1, x_2) = (fy + h)^4(X^4 + 6hX^2 + 4tX + g_2 f^2 - 3h^2).$$

Pongasi infine:

$$y = \wp(u), \qquad z = \wp'(u), \qquad \frac{h}{f} = -\wp(v),$$

sarà, come è noto:

$$\frac{t}{f^{\frac{3}{2}}} = \wp'(v);$$

e quindi:

$$X = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

Ma *)

$$g_2 = 12\wp^2(v) - 2\wp''(v),$$

$$\wp''(v) = \wp'(v)\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} + 2[\wp(u) - \wp(v)][\wp(u+v) - \wp(v)],$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right]^2 = \wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v),$$

e per queste note relazioni si giungerà alla

$$\rho^2\sqrt{f(x_1, x_2)} = f^{\frac{3}{2}}[\wp(u) - \wp(v)]^2[\wp(u) - \wp(u+v)],$$

la quale equivale alla seguente **):

$$\rho^2\sqrt{f(x_1, x_2)} = \tfrac{1}{2}\{t\wp'(u) + f^{\frac{1}{2}} h\wp''(u) + f^{\frac{3}{2}}[\wp(u)\wp''(u) - \wp'^2(u)]\}.$$

Notisi che essendo nel caso generale

$$\rho x_1 = \tfrac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z\cdot y_1 - (f_2 y + h_2), \qquad \rho x_2 = \tfrac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z\cdot y_2 + (f_1 y + h_1),$$

si ha supponendo z funzione di y:

$$\rho^2\left(x_2\frac{dx_1}{dy} - x_1\frac{dx_2}{dy}\right) = (fy + h)\left(\frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dy} - X\right),$$

dalla quale, per valore di X, ottiensi la

$$\rho^2(x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2) = \frac{(fy+h)^2}{f} dX.$$

---

*) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, Première partie (Paris, 1886), pag. 120.

**) KLEIN, *Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen* [Mathematische Annalen, t. XXVII (1886), pp. 431-464]. A pag. 458 trovasi questa stessa formola, ma l'ultimo termine del secondo membro non è esatto.

Se $n = 4$, si ha per una nota formola:

$$\frac{dX}{du} = f^{\frac{1}{2}}[\wp(u) - \wp(u+v)],$$

e per essa siamo ricondotti alla

$$\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = du.$$

4 maggio 1895.

CLX.

SULLE EQUAZIONI MODULARI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, volume V (1896, 2° sem.), pp. 333-340.

1. In una Comunicazione, collo stesso titolo, da me presentata a questa Accademia nel settembre dell'anno 1893 *), io osservava che dalle funzioni di $\wp(u)$ indicate da Halphen nel suo *Traité des fonctions elliptiques* **) con

$$\psi_2(u), \qquad \psi_3(u), \qquad \psi_4(u),$$

ottenevasi la relazione:

$$\wp(u) = \frac{1}{12\psi_2^4\psi_3^2}[(\psi_4 + \psi_2^5)^2 + 4\psi_2^2\psi_3^3],$$

e quindi ponendo ***)

$$\psi_3 = h^{\frac{1}{3}}\psi_2^{\frac{8}{3}}, \qquad \psi_4 = k\psi_2^5,$$

risultava:

$$\wp(u) = \tfrac{1}{12}\rho[(k+1)^2 + 4h)], \tag{1}$$

essendo

$$\rho = \frac{\psi_2^6}{\psi_3^2} = \left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

*) [CLVI: t. IV, pp. 111-120 (pag. 117)].

**) t. I (Paris, 1886), pag. 96.

***) Le lettere h, k sostituiscono le x, y di Halphen.

Che inoltre nella formola di moltiplicazione (pag. 100)

$$\wp(mu) = \wp(u) - \rho h^{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_{m+1}\gamma_{m-1}}{\gamma_m^2}, \tag{2}$$

essendo

$$\gamma_2 = 1, \qquad \gamma_3 = h^{\frac{1}{3}}, \qquad \gamma_4 = k,$$

e le $\gamma_5, \gamma_6, \ldots$ funzioni di γ_3, γ_4, ossia di h, k, le $\wp(u)$, $\wp(2u)$, $\wp(3u) \ldots$ si ponno esprimere in funzione di ρ, h, k.

In quella stessa Comunicazione osservava ancora come gli invarianti g_2, g_3 ed il discriminante

$$\delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

potevano esprimersi in funzione di ρ, h, k; essendo per esempio:

$$\delta = -\rho^6 h^3 [k(k+1)^3 + 8h(k+1)^2 + 16h^2 - 36hk - 9h]; \tag{3}$$

e che infine nella ipotesi di

$$u = v = \frac{2\omega}{n},$$

risultando $\gamma_n = 0$, cioè una ulteriore relazione fra h, k, conseguiva che fra una funzione qualsivoglia delle $\wp(v)$, $\wp(2v)$, $\ldots$; le g_2, g_3; o le g_2, δ; oppure le g_3, δ; e la $\gamma_n = 0$, potevansi eliminare le quantità ρ, h, k.

Così ad esempio per $n = 5$, siccome la equazione $\gamma_5 = 0$ dà

$$h = k,$$

quindi:

$$\wp(v) = \frac{\rho}{12}(k^2 + 6k + 1),$$

$$\wp(2v) = \frac{\rho}{12}(k^2 - 6k + 1),$$

$$\wp(v) - \wp(2v) = \rho k,$$

inoltre:

$$g_2 = \frac{\rho^2}{12}(k^4 + 12k^3 + 14k^2 - 12k + 1),$$

$$\delta = -\rho^6 k^5 (k^2 + 11k - 1);$$

ponendo

$$\frac{\delta}{[\wp(v) - \wp(2v)]^6} = \xi,$$

sarà:

$$\xi = -\frac{1}{k}(k^2 + 11k - 1),$$

quindi:

$$\xi^2 + 10\xi + 5 = \frac{1}{k^2}(k^4 + 12k^3 + 14k^2 - 12k + 1),$$

$$\delta = \rho^6 k^6 \xi, \qquad \frac{1}{k^2} = \rho^2 \left(\frac{\xi}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}},$$

da cui:

$$\xi^2 + 10\xi - 12\frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}}\xi^{\frac{1}{3}} + 5 = 0,$$

nota equazione modulare per la trasformazione del quinto ordine.

2. Se non che la equazione $\gamma_n = 0$, la quale anche pel caso di $n = 6$ darebbe

$$h = k(1 - k),$$

pei casi successivi condurrebbe ad equazioni dei gradi 2°, 3°, ... in h, e quindi la eliminazione presenta difficoltà non lievi.

Il sig. GREENHILL, nel suo interessante lavoro: *Pseudo-Elliptic Integrals and their Dynamical Applications* *), le ha d'assai diminuite sostituendo ad h e k funzioni di due nuove quantità, per le quali la equazione $\gamma_n = 0$ si abbassa di grado.

Ora, supposto che per questa via dai valori di $\wp(v)$, $\wp(2v)$, ... e da quello di δ si elimini ρ ed una di quelle quantità, si otterranno per $\wp(v)$, $\wp(2v)$, ... espressioni formate con una sola indeterminata. D'altra parte le $\wp(v)$, $\wp(2v)$, ..., come è noto, sono radici di una equazione, di cui il polinomio primo membro figura nella formola di trasformazione. È evidente che la ricerca del valore della indeterminata in funzione degli invarianti di quel polinomio equivale alla risoluzione della menzionata equazione, equazione risolubile per radicali, qualunque ne sia il grado, perchè Abeliana.

Considereremo nei n^i seguenti i tre casi di $n = 7$, $n = 9$, $n = 13$; nel primo, la equazione risultando del 3° grado, l'unico invariante è il discriminante Δ; nel secondo la equazione è del 4° grado e si hanno i due invarianti A, B quadratico e cubico; infine nel terzo la equazione è del 6° grado e si hanno gli invarianti A, L, M, R dei gradi 2°, 4°, 6°, 15° ed il discriminante Δ.

---

*) [Proceedings of the London Mathematical Society, t. XXV (1893-94), pp. 195-304]. Vedi anche dello stesso autore: *The Transformation and Division of Elliptic Functions* [Ibid., t. XXVII (1895-96), pp. 403-486].

3. Sia $n = 7$, si ha:

$$\gamma_7 = h^2 - hk + k^3,$$

la quale, ponendo col sig. GREENHILL:

$$h = k(1 - q),$$

dà per h e k i valori:

$$k = q(1 - q), \qquad h = q(1 - q)^2.$$

Sostituiti questi valori nella espressione (3) di δ, si ottiene:

$$\delta = \rho^6 q^7 (1 - q)^7 (q^3 + 5q^2 - 8q + 1);$$

ma dalla formola (2) si ha:

$$\Delta = [\wp(v) - \wp(2v)]^2 [\wp(2v) - \wp(3v)]^2 [\wp(3v) - \wp(v)]^2 = \rho^6 h^2 k^2 (k - h)^2;$$

quindi:

$$\Delta = \rho^6 q^8 (1 - q)^8,$$

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{q^3 + 5q^2 - 8q + 1}{q(1 - q)}.$$

Indico con ξ il secondo membro e pongo

$$2\varepsilon + 1 = \sqrt{-3},$$

inoltre:

$$\xi + 8 + 3\varepsilon = \alpha^3, \qquad \xi + 8 + 3\varepsilon^2 = \beta^3;$$

si otterranno le

$$\alpha^3 = \frac{(\varepsilon q + 1)^3}{q(1 - q)}, \qquad \beta^3 = \frac{(\varepsilon^2 q + 1)^3}{q(1 - q)},$$

da cui:

$$q = -\frac{\alpha - \beta}{\varepsilon^2 \alpha - \varepsilon \beta}.$$

Per questo valore di q i valori di $\wp(v)$, $\wp(2v)$, $\wp(3v)$ diventano:

$$\wp(v) = -a_1 + \tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}(\alpha + \beta),$$

$$\wp(2v) = -a_1 + \tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}(\varepsilon^2 \alpha + \varepsilon \beta),$$

$$\wp(3v) = -a_1 + \tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}(\varepsilon \alpha + \varepsilon^2 \beta),$$

essendo

$$a_1 = -\tfrac{1}{12}\Delta^{\frac{1}{6}}(\xi^2 + 13\xi + 49)^{\frac{2}{3}},$$

od anche

$$a_1 = -\frac{1}{12}\Delta^{\frac{1}{6}}\alpha^2\beta^2.$$

Nella trasformazione delle funzioni ellittiche del 7° ordine, se, indicando con $\overline{\delta}$ il valore di δ trasformato, si pone

$$\chi = \left(\frac{\overline{\delta}}{\delta}\right)^{\frac{1}{24}},$$

si ha:

$$\xi = \chi^4,$$

quindi i valori di $\wp(v)$, $\wp(2v)$, $\wp(3v)$ possono esprimersi per δ e χ.

Si possono porre a confronto questi valori con quelli dati da HALPHEN *).

4. Consideriamo in secondo luogo il caso di $n = 9$. La equazione $\gamma_9 = 0$ dà:

$$k^3(k - h - k^2) - (k - h)^3 = 0,$$

la quale ponendo come sopra:

$$k - h = kq,$$

inoltre

$$q - k = \frac{q^2}{p},$$

riducesi alla

$$k = pq,$$

quindi:

$$q = p(1 - p), \qquad k = p^2(1 - p), \qquad h = p^2(1 - p)(1 - p + p^2).$$

Dalla equazione (3) per questi valori si ottiene:

$$\delta = \rho^6 p^{10}(1 - p)^{10}(1 - p + p^2)^3\xi,$$

posto **):

$$\xi = -\frac{p^3 - 6p^2 + 3p + 1}{p(1 - p)},$$

ed in conseguenza:

$$\xi^2 + 9\xi + 27 = \frac{(1 - p + p^2)^3}{p^2(1 - p)^2}.$$

---

*) *Traité des fonctions elliptiques,* t. III (Paris, 1891), Chap. II, pag. 60.

**) Nella corrispondente formola del sig. GREENHILL (loco cit., pag. 233) vi è un lieve errore di calcolo.

Si indichino con α^3, β^3 le espressioni

$$\xi + 6 + 3\varepsilon = \alpha^3, \qquad \xi + 6 + 3\varepsilon^2 = \beta^3,$$

$$2\varepsilon + 1 = \sqrt{-3},$$

ponendo nelle medesime il valore superiore di ξ si deducono le

$$\alpha^3 = -\frac{(\varepsilon^2 p + 1)^3}{p(1-p)}, \qquad \beta^3 = -\frac{(\varepsilon p + 1)^3}{p(1-p)},$$

da cui:

$$p = -\frac{\alpha - \beta}{\varepsilon\alpha - \varepsilon^2\beta},$$

od anche:

$$p = \frac{1}{3}[\alpha\beta(\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta) + \xi + 6].$$

I valori degli invarianti quadratico e cubico, e del discriminante della equazione, le radici della quale sono le $\wp(v)$, $\wp(2v)$, ..., si possono così rappresentare:

$$4^2 \Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta}{\xi},$$

$$\frac{A}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = -\frac{4}{3^3}\alpha\beta, \qquad \frac{B}{\Delta^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{3^3}(\alpha^3 + \beta^3),$$

notando essere

$$\alpha^3\beta^3 = \xi^2 + 9\xi + 27, \qquad \alpha^3 + \beta^3 = 2\xi + 9.$$

I valori delle radici $\wp(v)$, $\wp(2v)$, ... in funzione di ξ, δ, sono:

$$\wp(v) = -a_1 + \frac{\sigma}{12}[4\alpha\beta(\varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta) + \xi + 6],$$

$$\wp(2v) = -a_1 + \frac{\sigma}{12}[4\alpha\beta(\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta) + \xi + 6],$$

$$\wp(3v) = -a_1 - \frac{\sigma}{4}[\xi + 6],$$

$$\wp(4v) = -a_1 + \frac{\sigma}{12}[4\alpha\beta(\alpha + \beta) + \xi + 6],$$

nelle quali

$$\sigma = \left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}}, \qquad a_1 = -\frac{\sigma}{12}\alpha^3\beta^3.$$

Il valore di

$$\wp(3v) = \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right),$$

per quello di a_1, diventa

$$\wp(3v) = \frac{\sigma}{12}(\xi + 3)^2,$$

ed essendo, come è noto:

$$\wp^4(3v) - \tfrac{1}{2} g_2 \wp^2(3v) - g_3 \wp(3v) - \frac{1}{3.4^2} g_2^2 = 0,$$

la equazione è soddisfatta dai valori:

$$3.4 \frac{g_2}{\sigma^2} = (\xi + 3)[(\xi + 3)^3 - 3.8],$$

$$8.3^3 \frac{g_3}{\sigma^3} = -(\xi + 3)^6 + 3^2.4(\xi + 3)^3 - 8.3^3,$$

come appunto dà la trasformazione del sesto ordine *).

Notiamo infine che le radici $\wp(v)$, $\wp(2v)$, ... possono anche esprimersi in funzione di A, B, Δ; in quanto che:

$$\alpha^3 = \frac{3\sqrt{-3}}{2\Delta^{\frac{1}{2}}}(\Delta^{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{-3}.B), \qquad \beta^3 = -\frac{3\sqrt{-3}}{2\Delta^{\frac{1}{2}}}(\Delta^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{-3}.B),$$

$$\xi + 6 = \frac{3}{2\Delta^{\frac{1}{2}}}(\Delta^{\frac{1}{2}} - 9B), \qquad \sigma = \frac{2^{\frac{5}{3}}\Delta^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}}},$$

e così anche i valori di g_2, g_3.

5. Passiamo da ultimo al caso di $n = 13$. Ponendo come nei casi precedenti

$$k - h = kq, \qquad q - k = \frac{q^2}{p},$$

ed introducendo una nuova quantità r legata alle altre dalla relazione

$$q = r(p - 1),$$

---

*) Kiepert, *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade* [Mathematische Annalen, t. XXXII (1888), pp. 1-135 (p. 66)].

la condizione $\gamma_{13} = 0$, come ha dimostrato il sig. GREENHILL, si riduce alla

$$P^2 - tP - 1 = 0,$$

nella quale:

$$P = \frac{p+r}{r(r+1)}, \qquad t = \frac{1 + 2r - r^2 - r^3}{r(r+1)}.$$

Il valore di δ calcolato colla formola (3) ha questa semplice forma

$$\delta = \sigma^2 P^2 \xi,$$

nella quale

$$\sigma = \rho^3 \frac{k^2 q^4}{r^4}, \qquad \xi = t - 3.$$

Anche in questo caso, posto

$$\alpha^3 = \xi + 4 + 3\varepsilon, \qquad \beta^3 = \xi + 4 + 3\varepsilon^2,$$

ottiensi:

$$r = \frac{\alpha - \beta}{\varepsilon\alpha - \varepsilon^2\beta},$$

$$\alpha^3\beta^3 = \xi^2 + 5\xi + 13, \qquad \alpha^3 + \beta^3 = 2\xi + 5,$$

ed i valori delle radici $\wp(v)$, $\wp(2v)$, ... in funzione di ξ, δ raggruppati convenientemente sono:

$$\wp(v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} [b^3c + (b-c)\sqrt{-3}\,T],$$

$$\wp(3v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} [c^3a + (c-a)\sqrt{-3}\,T],$$

$$\wp(4v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} [a^3b + (a-b)\sqrt{-3}\,T],$$

$$\wp(5v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} [-b^3c + (b-c)\sqrt{-3}\,T],$$

$$\wp(2v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} [-c^3a + (c-a)\sqrt{-3}\,T],$$

$$\wp(6v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} [-a^3b + (a-b)\sqrt{-3}\,T],$$

nelle quali:

$$a = \varepsilon^2 \alpha - \varepsilon \beta, \qquad b = \varepsilon \alpha - \varepsilon^2 \beta, \qquad c = \alpha - \beta,$$

$$T = \sqrt{t^2 + 4} = (\xi^2 + 6\xi + 13)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_1 = -\frac{1}{12}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} \alpha^2 \beta^2 T.$$

Quanto agli invarianti A, L, M, R dei gradi 2°, 4°, 6°, 15° ed al discriminante Δ, si ottengono i seguenti valori:

$$-3.5.8 \frac{A}{\Delta^{\frac{1}{5}}} = 3\xi^2 + 16\xi + 36,$$

$$-3^2 \frac{L}{\Delta^{\frac{2}{5}}} = \xi^2 + 6\xi + 15,$$

$$4.3^3 \frac{M}{\Delta^{\frac{3}{5}}} = 4\xi^3 + 4.3^2\xi^2 + 13.3^2\xi + 2.3^4,$$

$$-\frac{R}{\Delta^{\frac{3}{2}}} = \alpha^3 \beta^3 (\alpha^3 + \beta^3) t T,$$

da ultimo:

$$\Delta^{\frac{1}{5}} = \frac{\delta}{\xi}.$$

La eliminazione di ξ fra i valori dei primi tre invarianti conduce a due relazioni di condizione fra gli invarianti di questa speciale equazione Abeliana.

1 novembre 1896.

CLXI.

SOPRA UNA NUOVA FORMOLA NEL CALCOLO INTEGRALE.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, anno III (1864), pp. 63-68.

1. Sia $u(x, y, z)$ una funzione omogenea a tre variabili x, y, z e supponiamo le variabili stesse legate dalle due equazioni

$$u(x, y, z) = 0, \qquad lx + my + nz = p. \tag{1}$$

Considerate queste come due equazioni a due incognite y, z, indichiamo colle stesse y, z un sistema di valori soddisfacenti ad esse; sostituiti i valori medesimi nelle (1) diverranno identiche; sussisteranno cioè con esse anche quelle che si ottengono eguagliando a zero le loro derivate rispetto ad x e rispetto ai coefficienti delle due equazioni (1). Si avranno quindi le due coppie di equazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l} = 0,$$

$$m\frac{\partial y}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial x} = -l, \qquad m\frac{\partial y}{\partial l} + n\frac{\partial z}{\partial l} = -x;$$

e per una nota proprietà delle funzioni omogenee:

$$y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = -x\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$ym + zn = p - lx.$$

Da queste equazioni, ponendo per brevità

$$H = n\frac{\partial u}{\partial y} - m\frac{\partial u}{\partial z},$$

si ottengono le

$$H\frac{\partial y}{\partial x} = l\frac{\partial u}{\partial z} - n\frac{\partial u}{\partial x}, \quad H\frac{\partial y}{\partial l} = x\frac{\partial u}{\partial z}, \quad Hy = x\left(l\frac{\partial u}{\partial z} - n\frac{\partial u}{\partial x}\right) - p\frac{\partial u}{\partial z};$$

dalle quali eliminando $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ si giunge alla

$$xy = x^2\frac{\partial y}{\partial x} - p\frac{\partial y}{\partial l}. \tag{2}$$

Analogamente si avrà la

$$y^2 = xy\frac{\partial y}{\partial x} - p\frac{\partial y}{\partial m},$$

la quale e l'antecedente (2), fatto $\frac{y}{x} = Y$, ponno porsi sotto la forma:

$$p\frac{\partial y}{\partial l} = x^3\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad p\frac{\partial y}{\partial m} = yx^2\frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{3}$$

ed in conseguenza:

$$x\frac{\partial y}{\partial m} = y\frac{\partial y}{\partial l}.$$

2. Dalla prima delle equazioni (3), ponendo per brevità Y', Y'', ... in luogo di $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, ..., si deduce la

$$\left\{\begin{aligned} p^r\frac{\partial^r y}{\partial l^r} = \Pi(r).x^{r+2}\Big[Y' + \frac{r-1}{\Pi(1)\Pi(2)}xY'' + \frac{(r-1)(r-2)}{\Pi(2)\Pi(3)}x^2Y''' + \cdots \\ \cdots + \frac{(r-1)(r-2)\ldots 2.1}{\Pi(r-1)\Pi(r)}x^{r-1}Y^{(r)}\Big], \end{aligned}\right. \tag{4}$$

essendo

$$\Pi(r) = 1.2.3 \ldots r.$$

Così dalle relazioni superiori si ottiene la

$$(s+1)p^s\frac{\partial^s y}{\partial m^s} = \Pi(s).x^{s+2}\Big[(Y^{s+1})' + \frac{s-1}{\Pi(1)\Pi(2)}x(Y^{s+1})'' + \frac{(s-1)(s-2)}{\Pi(2)\Pi(3)}x^2(Y^{s+1})''' + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(s-1)(s-2)\ldots 2.1}{\Pi(s-1)\Pi(s)}x^{s-1}(Y^{s+1})^{(s)}\Big],$$

la quale, ponendo per brevità

$$Z_s = x^{s+1}\left[(Y^{s+1})' + \frac{s-1}{\Pi(1)\Pi(2)} x (Y^{s+1})'' + \cdots + \frac{(s-1)(s-2)\ldots 2.1}{\Pi(s-1)\Pi(s)} x^{s-1} (Y^{s+1})^{(s)}\right],$$

dà:

$$(s+1)p^s \frac{\partial^s Y}{\partial m^s} = \Pi(s).Z_s;$$

quindi per la (4):

$$(s+1)p^{r+s}\frac{\partial^{r+s} y}{\partial l^r \partial m^s} = \Pi(r)\Pi(s)x^{r+2}\left[Z'_s + \frac{r-1}{\Pi(1)\Pi(2)} x Z''_s + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{(r-1)(r-2)\ \ldots\ 2.1}{\Pi(r-1)\Pi(r)} x^{r-1} Z_s^{(r)}\right].$$

Integrando quest'ultima equazione rispetto ad x e supponendo gli integrali estesi a limiti indipendenti dalle l, m, si avrà:

$$(s+1)p^{r+s}\frac{\partial^{r+s}}{\partial l^r \partial m^s}\int y\, dx = \Pi(r)\Pi(s)\left[\int x^{r+2} Z'_s\, dx + \frac{r-1}{\Pi(1)\Pi(2)}\int x^{r+3} Z''_s\, dx + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{(r-1)(r-2)\ \ldots\ 2.1}{\Pi(r-1)\Pi(r)}\int x^{2r+1} Z_s^{(r)}\, dx\right];$$

la quale mediante l'integrazione per parti si riduce alla

$$(s+1)p^{r+s}\frac{\partial^{r+s}}{\partial l^r \partial m^s}\int y\, dx = \Pi(r)\Pi(s)\left[\sum_1^r {}_t A_{r,t} x^{r+t+1} Z_s^{(t-1)} - H_r \int x^{r+1} Z_s\, dx\right],$$

supponendo nella medesima la quantità non affetta da segno integrale del secondo membro essere estesa ai due limiti valori di x.

Analogamente pel valore di Z_s e col mezzo dell'integrazione per parti si ottiene:

$$\int x^{r+1} Z_s\, dx = \sum_1^s {}_t A_{r,s,t} x^{q+1} (Y^{s+1})^{(t-1)} - H_{r,s}\int x^{r+s+1} y^{s+1}\, dx,$$

essendosi posto per brevità $r + s + t = q$. Sostituendo si avrà quindi la formola:

$$(5) \qquad (s+1)p^{r+s}\frac{\partial^{r+s}}{\partial l^r \partial m^s}\int y\, dx = \Pi(r)\Pi(s)\left(F_{r,s} + H_r H_{r,s}\int x^r y^{s+1}\, dx\right),$$

nella quale la funzione $F_{r,s}$ rappresenta il valore dell'espressione

$$\sum_1^r {}_t A_{r,t} x^{r+t+1} Z_s^{(t-1)} - H_r \sum_1^s {}_t A_{r,s,t} x^{q+1} (Y^{s+1})^{(t-1)}$$

estesa ai limiti valori di x, e le $A_{r,s,t}$, $H_{r,s}$ sono le espressioni numeriche seguenti:

$$A_{r,s,t} = \Pi(s-1)\left[\frac{1}{\Pi(1)\Pi(2)\Pi(s-t)} - \frac{q+2}{\Pi(2)\Pi(3)\Pi(s-t-1)} + \frac{(q+2)(q+3)}{\Pi(3)\Pi(4)\Pi(s-t-2)} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^{s+t} \frac{(q+2)(q+3)\ldots(q+s-t+1)}{\Pi(s-1)\Pi(s)}\right],$$

$$H_{r,s} = (r+s+2)\left[1 - \frac{s-1}{\Pi(1)\Pi(2)}(r+s+3) + \frac{(s-1)(s-2)}{\Pi(2)\Pi(3)}(r+s+3)(r+s+4) - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^{s} \frac{(s-1)(s-2)\ldots 2.1}{\Pi(s-1)\Pi(s)}(r+s+3)\ldots(r+2s+1)\right],$$

ed

$$A_{r,t} = A_{0,r,t}, \qquad H_r = H_{0,r},$$

cioè le $A_{r,t}$, H_r sono le stesse funzioni $A_{r,s,t}$, $H_{r,s}$ nelle quali si faccia $r = 0$ e quindi si sostituisca r ad s.

L'equazione (5) conduce alla seguente formola di calcolo integrale:

$$H_r H_{r,s} \int dx \int_0^y dy . x^r y^s = -\frac{1}{s+1} F_{r,s} + \frac{p^{r+s}}{\Pi(r)\,\Pi(s)} \frac{\partial^{r+s}}{\partial l^r \partial m^s} \int dx \int_0^y dy,$$

per la quale, indicando con $\varphi(x, y)$ una funzione razionale, intiera di x e di y, il valore di

$$\int dx \int_0^y dy . \varphi(x, y) \qquad \text{od anche} \qquad \int dx \int_{y_1}^{y_2} dy . \varphi(x, y)$$

[essendo y_1, y_2 due valori di y i quali coi corrispondenti per z soddisfano le equazioni (1)] sarà dato mediante derivazioni rispetto ad l e ad m eseguite sul valore di

$$\int dx \int_{y_1}^{y_2} dy .$$

3. Questo teorema di calcolo integrale può dare origine a varie applicazioni; mi limiterò per ora ad accennare la seguente relativa ad una quistione geometrica.

Sieno ξ, η le coordinate ortogonali di un punto di una superficie piana; x, y, z le coordinate trilineari; indicando con ω uno degli angoli del triangolo fondamentale, trovasi per una opportuna disposizione degli assi:

$$\int d\xi \int d\eta = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \int dx \int dy,$$

ed in generale:

$$\int d\xi \int d\eta = C \int dx \int dy,$$

essendo C una costante. Inoltre le ξ, η o sono per quel caso particolare funzioni lineari di x, y e dell'angolo ω, od in generale funzioni lineari delle x, y, z. Quindi una funzione razionale, intera di ξ, η, nella quale si pongano per ξ, η i loro valori, condurrà ad una funzione razionale, intera delle x, y, z, o per la seconda delle equazioni (1) ad una funzione razionale, intera delle x, y; cioè si avrà:

$$\int d\xi \int d\eta . \psi(\xi, \eta) = C \int dx \int dy . \varphi(x, y).$$

Ora è noto che le espressioni

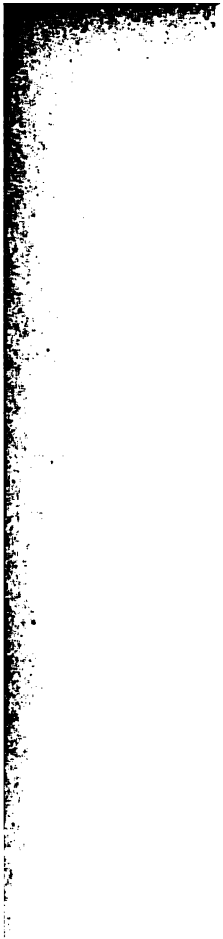
$$\int d\xi \int d\eta; \quad \int d\xi \int d\eta . \xi, \quad \int d\xi \int d\eta . \eta; \quad \int d\xi \int d\eta . \xi^2, \quad \int d\xi \int d\eta . \eta^2,$$

estesi gli integrali ai limiti determinati dal contorno della superficie che si considera, rappresentano l'area, i momenti ordinarj rispetto agli assi, i momenti d'inerzia rispetto agli assi stessi per quella superficie; quindi dalla trasformazione trilineare superiore e dal teorema analitico dimostrato deducesi che i valori di quei momenti ordinarj, dei momenti d'inerzia, etc. si ponno ottenere mediante derivazioni eseguite sulla espressione dell'area della superficie. Il Prof. SYLVESTER, in un suo ingegnoso lavoro: *On the centre of gravity of a truncated triangular pyramid, and on the principles of barycentric perspective* *), aveva già accennato ad una proprietà di questa specie come induzione di un caso particolare. In una conversazione avuta con lui pochi giorni sono mi disse aver ottenuto una completa dimostrazione di quel teorema geometrico-meccanico; e fu appunto tentando da mia parte una dimostrazione dello stesso che giunsi a quella formola generale di calcolo integrale che lo comprende.

È evidente che il teorema analitico estendesi al caso di un numero qualsivoglia di variabili, e quindi che la proprietà suddetta ha luogo pel volume di un corpo e pei momenti ordinarj e d'inerzia del medesimo.

Milano, 10 febbrajo 1864.

---

*) [Philosophical Magazine, t. XXVI (1863), pp. 167-183].

CLXII.

SOPRA ALCUNE NUOVE RELAZIONI MODULARI.

Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli,
volume III (1866-68), Memoria nº 2, pp. 1-16.

1. Nella classica opera di JACOBI: *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* *) vi ha un Capitolo intitolato: *De æquationum modularium affectibus* **), nel quale sono esposte alcune interessanti relazioni fra gli elementi che incontransi nella trasformazione delle funzioni ellittiche, cioè fra i due moduli ed il moltiplicatore. Altre proprietà relative alla trasformazione delle funzioni ellittiche erano pubblicate da JACOBI contemporaneamente a quell'opera nei primi volumi del giornale di CRELLE, e fra queste, forse la più importante, la equazione alle derivate parziali alla quale devono soddisfare il numeratore ed il denominatore della formola di trasformazione.

Posto

$$\xi = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}\,(u,\ k), \qquad \eta = \sqrt{\lambda}.\,\mathrm{sn}\,(x u,\ \lambda),$$

essendo k, λ i due moduli, ed x il moltiplicatore, si ha per la trasformazione dell'n^{mo} ordine, supposto n un numero primo dispari, la formola:

$$\eta = \frac{U(\xi)}{V(\xi)},$$

nella quale:

---

*) [Regiomonti, 1829; Gesammelte Werke, t. I (1881), pp. 49-239].

**) [Gesammelte Werke, t. I, pp. 122-138].

$$U(\xi) = \xi(B_{\frac{n-1}{2}} + B_{\frac{n-3}{2}}\xi^2 + \cdots + B_1\xi^{n-3} + B\xi^{n-1}),$$

$$V(\xi) = B + B_1\xi^2 + B_2\xi^4 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}}\xi^{n-1};$$

ed i polinomi U e V soddisfano all'equazione a derivate parziali:

$$n(n-1)k\xi^2 V + (n-1)[(1+k^2)\xi - 2k\xi^3]\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

$$+ [k - (1+k^2)\xi^2 + k\xi^4]\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + 2nkk'^2\frac{\partial V}{\partial k} = 0.$$

Da questa equazione differenziale si ponno dedurre i valori dei coefficienti B_1, B_2, ... in funzione di uno dei due B, $B_{\frac{n-1}{2}}$ e delle loro derivate rispetto a k; infatti, sostituendo nella medesima per V il polinomio superiore, dai coefficienti delle varie potenze di ξ si ottengono le

$$2nkk'^2\frac{dB}{dk} + 1.2kB_1 = 0,$$

$$2nkk'^2\frac{dB_1}{dk} + n(n-1)kB + 2(n-2)(1+k^2)B_1 + 3.4kB_2 = 0,$$

. . . .

$$2nkk'^2\frac{dB_{\frac{n-1}{2}}}{dk} + 2.3kB_{\frac{n-3}{2}} + (n-1)(1+k^2)B_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

ed in generale:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &2nkk'^2\frac{dB_r}{dk} + (n-2r+1)(n-2r+2)kB_{r-1} + 2r(n-2r)(1+k^2)B_r \\ &\qquad + (2r+1)(2r+2)kB_{r+1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Rammentiamo infine che i coefficienti B, $B_{\frac{n-1}{2}}$ sono formati coi moduli, col moltiplicatore e coi moduli complementari k', λ' nel modo seguente:

$$B = \sqrt{\frac{\lambda' x}{k'}}, \qquad B_{\frac{n-1}{2}} = x\sqrt{\frac{\lambda\lambda' x}{kk'}}.$$

2. Dalle formole per la trasformazione delle funzioni ellittiche contenute nei *Fundamenta nova* (pag. 47) *) si deduce che

$$(2)\quad \begin{cases} U(\xi) = B\xi(\xi^2 - k\,\mathrm{sn}^2\,2\rho)(\xi^2 - k\,\mathrm{sn}^2\,4\rho)\cdots[\xi^2 - k\,\mathrm{sn}^2(n-1)\rho] \\ \qquad = B\xi\prod_1^{\frac{n-1}{2}}(\xi^2 - k\,\mathrm{sn}^2\,2m\rho), \end{cases}$$

nella quale la quantità ρ può assumere i valori:

$$\frac{K}{n},\quad \frac{iK'}{n},\quad \frac{K+iK'}{n},\ldots,\ \frac{(n-1)K+iK'}{n}.$$

I coefficienti B_1, B_2, B_3, ..., i quali per l'equazione superiore risultano eguali alla semplice somma, ed alle somme dei prodotti due a due, tre a tre, etc. delle quantità $k\,\mathrm{sn}^2\,2m\rho$, hanno quindi ciascuno $n+1$ valori come il modulo trasformato λ ed il moltiplicatore x.

Dalla equazione (2) deduconsi, ponendo $\xi = \sqrt{k}$, $\frac{1}{\sqrt{k}}$, le due seguenti:

$$U(\sqrt{k}) = B\sqrt{k^n}\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{cn}^2\,2m\rho,\qquad U\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{B}{\sqrt{k^n}}\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{dn}^2\,2m\rho,$$

e dividendo la equazione stessa per ξ, posto in seguito $\xi = 0$, la

$$\beta_{n-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}k^{\frac{n-1}{2}}B\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{sn}^2\,2m\rho.$$

Per queste relazioni le equazioni (4), (5), (6) del § 23 **) dell'opera di Jacobi, ossia le

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}x\sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} = \prod\mathrm{sn}^2\,2m\rho;\quad \sqrt{\frac{\lambda k'^n}{\lambda' k^n}} = \prod\mathrm{cn}^2\,2m\rho;\quad \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}} = \prod\mathrm{dn}^2\,2m\rho$$

dànno le seguenti:

$$U(\sqrt{k}) = \sqrt{\lambda x k'^{n-1}};\qquad U\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sqrt{x\frac{k'^{n-1}}{k^n}};\qquad B_{\frac{n-1}{2}} = x\sqrt{\frac{\lambda\lambda' x}{kk'}}.$$

---

*) [Gesammelte Werke, t. I, pp. 87 e seg.].

**) [Gesammelte Werke, t. I, p. 97].

L'ultima di esse non è che il valore di $B_{\frac{n-1}{2}}$ già rammentato sopra, ma le prime due non furono peranco avvertite ed hanno importanti conseguenze. La seconda, osservando essere

$$\xi^n U\left(\frac{1}{\xi}\right) = V(\xi),$$

prende la forma:

$$(3) \qquad k'^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{x} = V(\sqrt{k}) = B + B_1 k + B_2 k^2 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-1}{2}},$$

e la prima dà:

$$(4) \qquad k'^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda x}{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} U(\sqrt{k}) = B_{\frac{n-1}{2}} + B_{\frac{n-3}{2}} k + \cdots + B_1 k^{\frac{n-3}{2}} + B k^{\frac{n-1}{2}}.$$

3. Differenziando la equazione (3) rispetto a k e sostituendo per le derivate $\frac{dB}{dk}$, $\frac{dB_1}{dk}$, ... i valori dati dalla formola (1), si ottiene il valore della derivata $\frac{d\sqrt{x}}{dk}$ espressa linearmente coi coefficienti B, B_1, ... moltiplicati per funzioni note di k. Infatti dalla (3) si deduce:

$$2nk'^{\frac{n+3}{2}} \frac{d\sqrt{x}}{dk} = \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}_r\, k^{r-1} \left[2nkk'^2 \frac{dB_r}{dk} + 2nrk'^2 B_r + n(n-1)k^2 B_r \right],$$

ossia per la (1):

$$2nk'^{\frac{n+3}{2}} \frac{d\sqrt{x}}{dk} = \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}_r\, k^{r-1} \{ B_r [2nrk'^2 + n(n-1)k^2 - 2r(n-2r)(1+k^2)]$$
$$- (n-2r+1)(n-2r+2)kB_{r-1} - (2r+1)(2r+2)kB_{r+1} \}.$$

Ma si hanno le

$$\sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}_r (n-2r+1)(n-2r+2)k^r B_{r-1} = \sum_0^{\frac{n-3}{2}} {}_r (n-2r-1)(n-2r)k^{r+1} B_r,$$

$$\sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}_r (2r+1)(2r+2)k^r B_{r+1} = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_r (2r-1)2rk^{r-1} B_r;$$

perciò sostituendo si giungerà alla formola cercata:

$$(5)\qquad n k'^{\frac{n-1}{2}} \frac{d\sqrt{x}}{dk} = B_1 + 2B_2 k + 3B_3 k^2 + \cdots + \frac{n-1}{2} B_{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-3}{2}}.$$

La proprietà dimostrata per la derivata prima sussiste evidentemente per le derivate di più alto ordine; si avranno quindi i due seguenti teoremi:

Teorema I. — *I coefficienti B, B_1, B_2, ... sono esprimibili per funzioni lineari della radice quadrata del moltiplicatore e delle sue derivate rispetto al modulo fino a quella dell'ordine* $\frac{n-1}{2}$.

Teorema II. — *La radice quadrata del moltiplicatore soddisfa ad una equazione differenziale lineare dell'ordine* $\frac{n+1}{2}$.

Questi due teoremi avranno pur luogo sostituendo alla radice quadrata del moltiplicatore la espressione $\sqrt{\frac{\lambda x}{k}}$, ed in generale una funzione X rappresentata dalla

$$(6)\qquad \sqrt{X} = Bf + B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}} f_{\frac{n-1}{2}},$$

nella quale le f, f_1, f_2, ... sono funzioni qualsivogliano di k.

4. È noto che il moltiplicatore x ha $n+1$ valori, cioè che la equazione, denominata *del moltiplicatore* perchè ha quei valori per radici, è del grado $n+1$. Le $n+1$ radici di questa equazione posseggono una proprietà accennata la prima volta da Jacobi nel tomo 3° del Giornale di Crelle *), la quale può dirsi la base di tutte le moderne ricerche sulla risoluzione delle equazioni algebriche.

Se con ω si indica una radice n^{ma} primitiva dell'unità, questa proprietà può esprimersi colle equazioni:

$$(7)\qquad \sum_1^n {}_r \sqrt{x_r} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n x_0}, \qquad \sum_1^n {}_r\, \omega^{(r-1)m} \sqrt{x_r} = 0,$$

nella seconda delle quali m rappresenta un non residuo quadratico di n se $\frac{n-1}{2}$ è pari, ed un residuo quadratico di n se $\frac{n-1}{2}$ è dispari. Queste relazioni lineari fra le radici quadrate delle radici del moltiplicatore sono quindi in numero $\frac{n+1}{2}$. Ora,

*) Jacobi, *Suite des notices sur les fonctions elliptiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. III (1828), pp. 303-310 (308-309)].

siccome differenziando queste equazioni rispetto a k un numero qualsivoglia di volte si ottengono altrettante equazioni della stessa forma, pel primo dei teoremi superiori si avrà che gli $n+1$ valori di ciascuno dei coefficienti B, B_1, ... della formola di trasformazione, soddisferanno ad equazioni della forma superiore, saranno cioè radici di altrettante equazioni dell'$(n+1)^{mo}$ grado aventi lo stesso gruppo dell'equazione del moltiplicatore. La stessa proprietà avrà quindi luogo per la espressione (6), la quale potrà considerarsi come la forma più generale delle radici di quelle equazioni modulari che hanno lo stesso gruppo dell'equazione del moltiplicatore. Quest'ultima osservazione è dovuta al signor Kronecker.

5. Se indicasi colla

$$F(x, k) = 0 \tag{8}$$

la equazione algebrica del grado $n+1$, che ha per radici gli $n+1$ moltiplicatori di una trasformazione dell' n^{mo} ordine, e si dinota con x una qualsivoglia di esse radici, si avrà, differenziando la equazione superiore rispetto a k, la seguente:

$$F'(x)\frac{dx}{dk} + \frac{\partial F}{\partial k} = 0. \tag{9}$$

Ora è noto che l'ultimo termine dell'equazione (8), cioè il termine indipendente dalla x è eguale a $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n$, quindi anche indipendente da k. La derivata $\frac{\partial F}{\partial k}$ risulterà perciò eguale al prodotto di x per un polinomio in x di grado non superiore ad $n-1$; e dalla (9) si dedurrà la seguente:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dk} = \frac{\varphi(x)}{F'(x)}\sqrt{x};$$

ma per un noto teorema il rapporto $\frac{\varphi(x)}{F'(x)}$ riducesi ad un polinomio in x di grado non superiore ad n; quindi, indicando con $\psi_1(x)$ questo polinomio, si avrà:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dk} = \psi_1(x)\sqrt{x}.$$

Da questa si dedurranno evidentemente le

$$\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2} = \psi_2(x)\sqrt{x}, \qquad \frac{d^3\sqrt{x}}{dk^3} = \psi_3(x)\sqrt{x}, \qquad \ldots \qquad \frac{d^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{x}}{dk^{\frac{n-1}{2}}} = \psi_{\frac{n-1}{2}}(x)\sqrt{x},$$

essendo $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, ... polinomj di gradi non superiori ad n; e le $\frac{n+1}{2}$ rela-

zioni lineari (7) saranno soddisfatte dalle $\frac{n+1}{2}$ espressioni:

(10) $$\sqrt{x}, \quad \psi_1(x)\sqrt{x}, \quad \psi_2(x)\sqrt{x}, \quad \ldots \quad \psi_{\frac{n-1}{2}}(x)\sqrt{x}.$$

6. Nella trasformazione del terzo ordine si avranno per le (3), (5) le

$$k'\sqrt{x} = B + B_1 k, \qquad 3k'\frac{d\sqrt{x}}{dk} = B_1,$$

dalle quali:

$$B = k'\sqrt{x} - 3kk'\frac{d\sqrt{x}}{dk}, \qquad B_1 = 3k'\frac{d\sqrt{x}}{dk},$$

e per la (1) si avrà che $\sqrt{x}$ soddisfa all'equazione differenziale del secondo ordine:

$$3kk'^2\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2} + (1 - 5k^2)\frac{d\sqrt{x}}{dk} + k\sqrt{x} = 0.$$

Inoltre, essendo

(11) $$F(x, k) = x^4 - 6x^2 + 8(1 - 2k^2)x - 3 = 0,$$

si avrà nel modo suindicato:

$$12kk'^2\frac{d\sqrt{x}}{dk} = -[x^3 - 7x + 6(1 - 2k^2)]\sqrt{x},$$

per la quale:

$$4k'B = [x^3 - 7x + 2(5 - 8k^2)]\sqrt{x}, \qquad 4kk'B_1 = -[x^3 - 7x + 6(1 - 2k^2)]\sqrt{x}.$$

Per questi valori la equazione (4), ossia la

$$k'\sqrt{\frac{\lambda x}{k}} = B_1 + Bk,$$

dà il valore di $\sqrt{\lambda}$ espresso per un polinomio del terzo grado in x, cioè:

$$\sqrt{\lambda} = -\frac{1}{4\sqrt{k}}[x^3 - 7x + 2(3 - 8k^2)],$$

dalla quale, per la (11):

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{k}}\frac{(x-1)(x+3)}{x}.$$

Ora, osservando che alla equazione (11) può darsi la forma:

$$(x-1)^3(x+3) = 16k^2x,$$

da quest'ultima si deducono le due seguenti:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{4k\sqrt{k}}{(x-1)^2}, \qquad 16\lambda^2 = \frac{(x-1)(x+3)^3}{x^3};$$

dalla prima delle quali si ha:

$$x = \frac{v + 2u^3}{v},$$

posto $v = \sqrt[4]{\lambda}$, $u = \sqrt[4]{k}$, come dà Jacobi nei *Fundamenta nova;* e dalla seconda:

$$(x-1)(x+3)^3 = 16\lambda^2 x^3,$$

la quale si ottiene dalla (11) mutando k in λ e la x in $-\frac{3}{x}$; valori i quali corrispondono, come è noto, alla trasformazione denominata da Jacobi *supplementare.*

Infine, essendo $B = \sqrt{\frac{\lambda' x}{k'}}$, si avrà pel valore di B trovato sopra:

$$\sqrt{\lambda'} = \frac{1}{4\sqrt{k'}}[x^3 - 7x + 2(5 - 8k^2)];$$

e quindi:

$$\sqrt{\lambda k} + \sqrt{\lambda' k'} = 1,$$

o la equazione modulare.

Nella trasformazione del quinto ordine si hanno le seguenti:

$$k'^2\sqrt{x} = B + B_1 k + B_2 k^2, \qquad 5k'^2\frac{d\sqrt{x}}{dk} = B_1 + 2B_2 k,$$

e derivando nuovamente la

$$25k'^4\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2} = -10B + \frac{1}{k}(k^2-3)B_1 + 6k^2 B_2;$$

per le quali:

$$6B = 2(2k^2+3)\sqrt{x} - 5k(5k^2+3)\frac{d\sqrt{x}}{dk} + 25k^2k'^2\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2},$$

$$3B_1 = -10k\sqrt{x} + 40k^2\frac{d\sqrt{x}}{dk} - 25kk'^2\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2},$$

$$6B_2 = 10\sqrt{x} + \frac{5}{k}(3 - 11k^2)\frac{d\sqrt{x}}{dk} + 25k'^2\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2};$$

e la equazione differenziale del terzo ordine:

$$25kk'^4\frac{d^3\sqrt{x}}{dk^3} + 25k'^2(1-5k^2)\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2} - \frac{1}{k}(9+46k^2-71k^4)\frac{d\sqrt{x}}{dk} + 4(1-2k^2)\sqrt{x} = 0.$$

La equazione del moltiplicatore è in questo caso la

$$F(x, k) = x^6 - 10x^5 + 35x^4 - 60x^3 + 55x^2 - 26x + 256k^2k'^2x + 5 = 0,$$

alla quale può anche darsi la forma:

$$(12)\qquad (x-1)^5(x-5) + 256k^2k'^2x = 0.$$

Da essa ottiensi:

$$F'(x)\frac{d\sqrt{x}}{dk} = -256k(1-2k^2)\sqrt{x};$$

ma si ha facilmente:

$$xF'(x) = 5(x-1)^4(x^2-4x-1),$$

$$(x^2-4x-1)(x^4-6x^3+12x^2-18x-5) = 64(1-2k^2)^2x;$$

quindi:

$$F'(x)(x^4-6x^3+12x^2-18x-5) = 320(1-2k^2)^2(x-1)^4,$$

$$\frac{320(1-2k^2)^2}{F'(x)} = 1 - 8\frac{x+1}{(x-1)^4} - \frac{2}{x-1};$$

per cui, ponendo

$$(13)\qquad \sqrt{x'} = 128k^2k'^2\frac{x+1}{(x-1)^4}\sqrt{x}, \qquad \sqrt{x''} = -640k^2k'^2\frac{1}{x-1}\sqrt{x},$$

ossia, per la $F(x, k) = 0$:

$$2\sqrt{x'} = (x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 61x^2 + 60x - 25 + 256k^2k'^2)\sqrt{x},$$

$$\tfrac{2}{5}\sqrt{x''} = (x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 34x^2 + 21x - 5 + 256k^2k'^2)\sqrt{x},$$

si avrà:

$$400kk'^2(1-2k^2)\frac{d\sqrt{x}}{dk} = -320k^2k'^2\sqrt{x} + 20\sqrt{x'} - \sqrt{x''};$$

e differenziando nuovamente:

$$400k^2k'^4(1-2k^2)\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2} = -64k^2k'^2(1+3k^2)\sqrt{x} - 4(3-11k^2)\sqrt{x'} - k^2\sqrt{x''}.$$

Per questi valori si hanno anche B, B_1, B_2 espressi nel modo seguente:

$$(14)\qquad \begin{cases} 160k^2k'^2(1-2k^2)B = k^2(160k'^2\sqrt{x} - 40k'^2\sqrt{x'} + \sqrt{x''}), \\ 160k^2k'^2(1-2k^2)B_1 = 2k(-160k^2k'^2\sqrt{x} + 20k'^2\sqrt{x'} - k^2\sqrt{x''}), \\ 160k^2k'^2(1-2k^2)B_2 = (1-2k^2)(-160k^2k'^2\sqrt{x} - \sqrt{x''}); \end{cases}$$

dalle quali reciprocamente si hanno le

$$\sqrt{x'} = 4k(2Bk + B_1), \qquad \sqrt{x''} = -160k^2(B + B_1k + B_2).$$

Rammentando il valore di B_2 e la espressione (13) di $\sqrt{x''}$, dall'ultima delle tre relazioni superiori si deduce la seguente:

$$(15) \qquad \sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{kk'}} = -\frac{x-5}{x(x-1)},$$

dalla quale:

$$256\lambda^2\lambda'^2x^5 = 256k^2k'^2x\frac{(x-5)^4}{(x-1)^4},$$

o per la equazione del moltiplicatore:

$$(x-1)(x-5)^5 + 256\lambda^2\lambda'^2x^5 = 0,$$

equazione del moltiplicatore nella trasformazione supplementare.

La equazione, di cui le radici sono rappresentate dalla

$$\sqrt{X} = Bf + B_1f_1 + B_2f_2,$$

nella quale f, f_1, f_2 sono funzioni di k, ha, come si è detto sopra, lo stesso gruppo dell'equazione del moltiplicatore ed è la più generale fra quelle che godono di quella proprietà. I coefficienti di quella equazione saranno funzioni di k, di cui i valori dipenderanno da quelli delle f, f_1, f_2. Una ricerca, l'importanza della quale fu indicata dal signor KRONECKER nel suo metodo sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado, consiste nel determinare le funzioni f, f_1, f_2 in modo che il coefficiente del secondo termine della equazione in X sia nullo. Ora dalle equazioni (14) si hanno facilmente le

$$\sum B^2 = 10, \qquad \sum B_1^2 = -40, \qquad \sum B_2^2 = -30,$$

$$\sum BB_1 = 0, \qquad \sum BB_2 = -10, \qquad \sum B_1B_2 = 20\frac{1+k^2}{k};$$

quindi:

$$\sum X = 10\left(f^2 - 4f_1^2 - 3f_2^2 - 2ff_2 + 4\frac{1+k^2}{k}f_1f_2\right),$$

nelle quali il simbolo $\sum$ dinota la somma dei sei valori della quantità che lo segue. Se $\sum X$ deve essere eguale a zero, si ha evidentemente:

$$f - f_2 = \pm 2\sqrt{(f_1 - kf_2)\left(f_1 - \frac{1}{k}f_2\right)},$$

e la funzione cercata sarà la

$$\sqrt{X} = \pm 2\sqrt{(f_1 - kf_2)\left(f_1 - \frac{1}{k}f_2\right)}.B + B_1 f_1 + (B + B_2)f_2.$$

Supponiamo $f_1 = kf_2$, si avrà:

$$\sqrt{X} = f_2(B + B_1 k + B_2),$$

od osservando essere

$$k'^2\sqrt{\frac{\lambda x}{k}} = Bk^2 + B_1 k + B_2, \qquad k'^2\sqrt{\frac{\lambda' x}{k'}} = Bk'^2,$$

posto $f_2 = \frac{1}{k'^2}$, si otterrà:

$$\sqrt{X} = \sqrt{\frac{\lambda x}{k}} + \sqrt{\frac{\lambda' x}{k'}} = \frac{\operatorname{cn} 2\rho}{\operatorname{cn} 4\rho} - \frac{\operatorname{cn} 4\rho}{\operatorname{cn} 2\rho},$$

come già dimostrai nella mia Nota: *Sul metodo di* KRONECKER *per la risoluzione delle equazioni di quinto grado* *). Gli altri due casi da me considerati in quella Nota e che soddisfano la stessa condizione corrispondono ai valori $f_1 = \frac{1}{k}f_2$, $f_1 = 0$, pei quali:

$$\sqrt{X} = \sqrt{x} - \sqrt{\frac{\lambda' x}{k'}}, \qquad \sqrt{X} = \sqrt{x} - \sqrt{\frac{\lambda x}{k}}.$$

7. Posto

$$\Delta(\xi, k) = \sqrt{(k - \xi^2)(1 - k\xi^2)},$$

si ha per le formole del n° 1 che

$$\frac{d\eta}{\Delta(\eta, \lambda)} = \frac{x\,d\xi}{\Delta(\xi, k)}.$$

Supponiamo che mediante due trasformazioni dello stesso ordine si abbiano le

$$\frac{d\mu}{\Delta(\mu, h)} = p\frac{d\xi}{\Delta(\xi, k)}, \qquad \frac{d\nu}{\Delta(\nu, l)} = q\frac{d\eta}{\Delta(\eta, \lambda)}, \tag{16}$$

si otterrà evidentemente:

$$\frac{d\nu}{\Delta(\nu, l)} = \frac{z\,d\mu}{\Delta(\mu, h)},$$

nella quale si ha:

$$z = \frac{q}{p}x.$$

*) [CXI: t. III, pp. 177-188].

Se a quest'ultima corrisponde una trasformazione dell'n^{mo} ordine, si avranno analogamente alle (3), (4) le seguenti:

$$(17)\qquad \begin{cases} b'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{z} = C + C_1 b + C_2 b^2 + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}, \\ b'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{lz}{b}} = C_{\frac{n-1}{2}} + C_{\frac{n-3}{2}} b + \cdots + C b^{\frac{n-1}{2}}, \end{cases}$$

nelle quali le C, C_1, ... si dedurranno l'una dall'altra come le B, B_1, ...

Si supponga che le trasformazioni corrispondenti alle equazioni (16) siano del secondo ordine; siano cioè:

$$(18)\qquad b = \frac{k + ik'}{2\sqrt{ikk'}},\quad l = \frac{\lambda + i\lambda'}{2\sqrt{i\lambda\lambda'}};\qquad p = 2i\sqrt{ikk'},\quad q = 2i\sqrt{i\lambda\lambda'};$$

si avrà:

$$(19)\qquad z = x\sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{kk'}},$$

e:

$$C = \sqrt{\frac{l'z}{b'}} = \sqrt{\frac{\lambda - i\lambda'}{k - ik'}}\sqrt{x},\qquad C_{\frac{n-1}{2}} = z\sqrt{\frac{ll'}{bb'}}\,z = x\sqrt{z},$$

all'ultima delle quali è opportuno aggiungere quella che ottiensi dal valore di z, ossia la

$$B_{\frac{n-1}{2}} = z\sqrt{x}.$$

8. I valori del moltiplicatore z deducendosi da quelli di x col mezzo di una trasformazione del secondo ordine operata sui due membri dell'equazione trascendente, le $\sqrt{z}$ soddisferanno $\frac{n+1}{2}$ equazioni analoghe alle (7) nelle quali siasi posto ω^2 in luogo di ω; sussisteranno cioè le equazioni:

$$(20)\qquad \sum_1^n{}_r \sqrt{z_r} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n z_0},\qquad \sum_1^n{}_r\, \omega^{(r-1)m}\sqrt{z_r} = 0,$$

nella seconda delle quali m rappresenta un residuo quadratico di n, se $\frac{n-1}{2}$ è pari, ed un non residuo quadratico di n, se $\frac{n-1}{2}$ è dispari.

Si avranno così $\frac{n+1}{2}$ funzioni C, C_1, C_2, ... $C_{\frac{n-1}{2}}$, le quali soddisferanno ad

$\frac{n+1}{2}$ equazioni analoghe alle superiori, e la funzione

$$\sqrt{z} = C\varphi + C_1\varphi_1 + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}\varphi_{\frac{n-1}{2}},$$

nelle quali φ, φ_1, ... sono funzioni di h e quindi di k, sarà la più generale fra le funzioni che hanno quella proprietà.

9. Se in luogo della trasformazione del secondo ordine, alla quale corrispondono le formole (18), si considera quella per cui:

$$h = \frac{1-k}{1+k}, \quad l = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}; \quad p = i(1+k), \quad q = i(1+\lambda),$$

si avrebbero le

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1+\lambda}{1+k}x}, \quad C = \sqrt{x\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}, \quad C_{\frac{n-1}{2}} = x\frac{\lambda'}{k'}\sqrt{x\sqrt{\frac{\lambda}{k}}},$$

o mutando λ in λ', k in k':

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1+\lambda'}{1+k'}x}, \quad C = \sqrt{x\sqrt{\frac{\lambda'}{k'}}}, \quad C_{\frac{n-1}{2}} = x\frac{\lambda}{k}\sqrt{x\sqrt{\frac{\lambda'}{k'}}},$$

espressioni tutte le quali hanno la proprietà indicata dalle equazioni (20).

La importante proprietà enunciata da JACOBI nel tomo 3° del Giornale di CRELLE per le radici delle equazioni del moltiplicatore, di soddisfare cioè alle equazioni (7), proprietà la quale, come dimostrai in una lettera al signor HERMITE *), estendesi ad altre funzioni che incontransi nella teoria delle funzioni ellittiche, viene così a completarsi in due modi, sia coll'aver determinato le $\frac{n+1}{2}$ funzioni B, B_1, ... di quella specie dalle quali dipendono linearmente tutte le altre che godono della proprietà indicata; sia coll'avere determinato altre $\frac{n+1}{2}$ funzioni C, C_1, ... le quali soddisfano un'altra serie di relazioni, le (20), che potrebbero denominarsi *complementari* delle (7).

Se poniamo $\sqrt[4]{\lambda} = v$, $\sqrt[4]{k} = u$; fra le funzioni che più di frequente si presentano nella teoria delle funzioni ellittiche appartengono alla prima specie, cioè soddisfano relazioni analoghe alle (7), le

*) *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVII (1858), pp. 337-341].

$$\sqrt{x},\quad \frac{v^2}{u^2}\sqrt{x},\quad \frac{v'^2}{u'^2}\sqrt{x},\quad x\frac{v^2v'^2}{u^2u'^2}\sqrt{x},\ \ldots$$

e sono della seconda specie, o soddisfano alle relazioni complementari, le

$$\frac{v}{u}\sqrt{x},\quad \frac{v'}{u'}\sqrt{x},\quad \frac{vv'}{uu'}\sqrt{x},\quad x\frac{v^4v'}{u^4u'}\sqrt{x},\quad x\frac{v'^4v}{u'^4u}\sqrt{x},\ \ldots$$

10. Nella trasformazione del terzo ordine, la relazione

$$B_1 = z\sqrt{x}$$

dà pel valore di B_1 trovato al n° 6:

$$z = -\frac{1}{4kk'}[x^3 - 7x + 6(1 - 2k^2)],$$

dalla quale per mezzo della (11) ottiensi:

$$\sqrt{z} = -\frac{1}{8kk'\sqrt{kk'}}\{(1 - 2k^2)[x^3 - 5x + 8(1 - 2k^2)] + x^2 - 5\}\sqrt{x}.$$

Da quest'ultima, essendo $C_1 = x\sqrt{z}$, si ha facilmente:

$$C_1 = -\frac{1}{8kk'\sqrt{kk'}}[x^3 - 5x + 8(1 - 2k^2) + (1 - 2k^2)(x^2 - 5)]\sqrt{x},$$

cioè le $\sqrt{z}$, C_1, ed in generale tutte le funzioni di x, le quali soddisfano alle relazioni complementari (20), dipendono linearmente dalle due espressioni:

$$[x^3 - 5x + 8(1 - 2k^2)]\sqrt{x}, \qquad (x^2 - 5)\sqrt{x}.$$

Notiamo infine la specie di reciprocità sussistente fra le funzioni x, z, per la quale, posto:

$$z = -\frac{1}{4ikk'}[x^3 - 7x + 6(1 - 2k^2)],$$

si ha:

$$x = \frac{1}{4ihh'}[z^3 - 7z + 6(1 - 2h^2)].$$

Passando alla trasformazione del quinto ordine, le equazioni (15), (19) dànno la

$$z = -\frac{x-5}{x-1}, \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{z+5}{z+1}. \tag{21}$$

Sostituendo questo valore di x nella (12) si ottiene:

$$(z+1)^5(z+5)=\frac{16}{k^2k'^2}z=256h^2h'^2z,$$

ed il valore di z dà:

$$16kk'\sqrt{z}=[x^5-10x^4+35x^3-59x^2+48x-15+256k^2k'^2]\sqrt{x}=\varphi(x)\sqrt{x}.$$

Inoltre, analogamente alle (13), si avranno le

$$\sqrt{z'}=-128h^2h'^2\frac{z-1}{(z+1)^4}\sqrt{z},\qquad \sqrt{z''}=640h^2h'^2\frac{1}{z+1}\sqrt{z},$$

ossia pel valore di z:

$$\sqrt{z'}=\frac{1}{16k^2k'^2}(x-1)^3(x-3)\sqrt{z},\qquad \sqrt{z''}=\frac{10}{k^2k'^2}(x-1)\sqrt{z}.$$

Ora, ponendo

$$\varphi_1(x)=x^3-7x^2+11x-5,$$

ed abbassando le potenze di x mediante l'equazione del moltiplicatore, si hanno le seguenti relazioni:

$$(x-1)\,\varphi(x)=-\varphi(x)+\varphi_1(x),$$

$$(x-1)^3\varphi(x)=-256k^2k'^2,$$

per le quali i valori di $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ diventano:

$$\sqrt{z'}=-\frac{1}{kk'}(x-3)\sqrt{x},\qquad \sqrt{z''}=\frac{5}{8k^3k'^3}[-\varphi(x)+\varphi_1(x)]\sqrt{x}.$$

Ne risulta che, posto $\varphi_2(x)=x-3$, le tre espressioni

$$\varphi(x)\sqrt{x},\qquad \varphi_1(x)\sqrt{x},\qquad \varphi_2(x)\sqrt{x}$$

soddisferanno alle relazioni complementari (20), e tutte le espressioni per le quali ha luogo la stessa proprietà saranno funzioni lineari di esse.

Per esempio si avrebbero le

$$32k'(1-2k^2)\frac{v'}{u'}\sqrt{x}=[\varphi(x)+\varphi_1(x)+16k'^2\varphi_2(x)]\sqrt{x},$$

$$32k(1-2k^2)\frac{v}{u}\sqrt{x}=[\varphi(x)+\varphi_1(x)+16k^2\varphi_2(x)]\sqrt{x}.$$

Un grandissimo numero di altre relazioni si potrebbero ottenere dalle superiori non prive di interesse, ma ci limiteremo ad accennare le due seguenti specialmente per la

semplicità del modo col quale possono ottenersi. Mutando la k in $\frac{ik'}{k}$ e λ in $\frac{i\lambda'}{\lambda}$, la x si muta come è noto nella $\frac{\lambda}{k}x$, e siccome le h, l diventerebbero

$$h = \frac{1 + k'}{2\sqrt{k'}}, \qquad l = \frac{1 + \lambda'}{2\sqrt{\lambda'}},$$

la z diventa eguale ad $x\sqrt{\frac{\lambda'}{k'}}$. La relazione (21) fra z ed x darà quindi:

$$x\sqrt{\frac{\lambda'}{k'}} = -\frac{\frac{\lambda}{k}x - 5}{\frac{\lambda}{k}x - 1}, \text{ ed analogamente } x\sqrt{\frac{\lambda}{k}} = -\frac{\frac{\lambda'}{k'}x - 5}{\frac{\lambda'}{k'}x - 1}.$$

La teoria delle funzioni ellittiche presenta dunque, distinte in due serie, un determinato numero di espressioni, le quali soddisfano alle relazioni della forma (7), od a quelle della forma (20). Lo studio in generale di tutte le equazioni, le radici delle quali devono verificare quelle relazioni, conduce a risultati analoghi ai superiori, come dimostrai in una Nota: *Sur une classe d'équations du quatrième degré,* pubblicata nel luglio 1863 nei « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences » *), e nelle Memorie: *Sulla risolvente* di MALFATTI *per le equazioni del 5° grado,* e sulle *Proprietà fondamentali di una classe di equazioni algebriche,* comunicate all'Istituto Lombardo nell'aprile 1863 e nel marzo 1864 **). Nel presente lavoro ebbi appunto in vista il mostrare di quanto la teoria delle equazioni modulari si avvantaggi e si completi per mezzo di quello studio.

5 maggio 1866.

*) [t. LVII (1863), pp. 106-108].

**) [LXIV: t. II, pp. 39-56; CXVI: t. III, pp. 217-241].

CLXIII.

SOPRA ALCUNE FORMOLE ELLITTICHE.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, volume XXVI (1890-91), pp. 586-595.

1. Sia $f(x)$ un polinomio del quarto grado

$$f(x) = A_0 x^4 + 4 A_1 x^3 + 6 A_2 x^2 + 4 A_3 x + A_4,$$

e sieno a_0, a_1, a_2, a_3 le radici dell'equazione $f(x) = 0$.

Posto

$$f_1(x) = \frac{1}{4} f'(x), \qquad f_2(x) = \frac{1}{3.4} f''(x), \qquad f_3(x) = \frac{1}{2.3.4} f'''(x),$$

$$l = f_1(a_0), \qquad m = \tfrac{1}{2} f_2(a_0), \qquad n = f_3(a_0),$$

è noto *) che dalla formola di trasformazione

$$x = a_0 + \frac{l}{s - m} \tag{1}$$

si deduce la

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}},$$

e che le radici e_1, e_2, e_3 della equazione $\varphi(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ hanno i seguenti

*) Caspary, *Extrait d'une lettre à M.* Hermite [Journal de Mathématiques pures et appliquées, IV^e série, t. V (1889), pp. 73-79].

valori:

$$e_1 = \frac{A_0}{12}(\beta - \gamma), \qquad e_2 = \frac{A_0}{12}(\gamma - \alpha), \qquad e_3 = \frac{A_0}{12}(\alpha - \beta),$$

essendo

$$\alpha = (a_0 - a_1)(a_2 - a_3), \qquad \beta = (a_0 - a_2)(a_3 - a_1), \qquad \gamma = (a_0 - a_3)(a_1 - a_2),$$

e quindi $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Indicando con a, b, c le tre espressioni

$$a = (a_0 - a_2)(a_0 - a_3), \qquad b = (a_0 - a_3)(a_0 - a_1), \qquad c = (a_0 - a_1)(a_0 - a_2),$$

i valori di α, β, γ prendono la forma:

$$\alpha = b - c, \qquad \beta = c - a, \qquad \gamma = a - b,$$

ed in conseguenza:

$$e_1 = \frac{A_0}{12}(b + c - 2a), \qquad e_2 = \frac{A_0}{12}(c + a - 2b), \qquad e_3 = \frac{A_0}{12}(a + b - 2c),$$

e siccome

$$m = \frac{A_0}{12}(a + b + c),$$

si avranno le

$$(2) \qquad m - e_1 = \frac{A_0}{4}a, \qquad m - e_2 = \frac{A_0}{4}b, \qquad m - e_3 = \frac{A_0}{4}c.$$

Da queste relazioni, osservando che

$$4(m - e_1)(m - e_2)(m - e_3) = \varphi(m), \qquad l^2 = \frac{A_0^2}{16}abc,$$

deducesi essere

$$l = \frac{1}{\sqrt{A_0}}\sqrt{\varphi(m)}.$$

Posto ora

$$s = \wp(u), \qquad m = \wp(v), \qquad \text{e quindi} \qquad \sqrt{\varphi(m)} = \wp'(v),$$

la formola di trasformazione (1) può scriversi:

$$x = a_0 + \frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{\wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

2. È noto che, posto

$$D = A_1^2 - A_0 A_2, \qquad G = A_0^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2 + 2A_1^3,$$

essendo

$$g_2 = A_0 A_4 - 4 A_1 A_3 + 3 A_2^2,$$

$$g_3 = A_0 A_2 A_4 + 2 A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3,$$

si ha identicamente:

$$\frac{G^2}{A_0^3} = 4\left(\frac{D}{A_0}\right)^3 - g_2 \frac{D}{A_0} - g_3,$$

per la quale, posto

$$\frac{D}{A_0} = \wp(w),$$

si ha:

$$\frac{G}{A_0 \sqrt{A_0}} = - \wp'(w).$$

Per determinare la relazione che deve esistere fra gli argomenti v, w, si osservi sussistere identicamente le due relazioni:

$$\frac{D}{A_0} = \frac{1}{A_0} n^2 - 2m, \qquad \frac{G}{A_0\sqrt{A_0}} = \sqrt{A_0}.l - \frac{6}{\sqrt{A_0}} mn + 2\frac{n^3}{A_0\sqrt{A_0}},$$

per le quali:

$$\frac{n^2}{A_0} = \wp(w) + 2\wp(v),$$

$$\frac{n}{\sqrt{A_0}} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(v) + \wp'(w)}{\wp(v) - \wp(w)};$$

ma *):

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(v) + \wp'(w)}{\wp(v) - \wp(w)}\right]^2 = \wp(v) + \wp(w) + \wp(v - w);$$

si avrà quindi:

$$\wp(v - w) = \wp(v),$$

e $v = \frac{1}{2} w$.

Dalla prima delle relazioni superiori deducesi così essere:

$$\frac{n^2}{A_0} = \wp(2v) + 2\wp(v),$$

o per la formola di duplicazione (Halphen, l. c., pag. 96):

$$\frac{n^2}{A_0} = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)}\right)^2,$$

---

*) V. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I (1886), pag. 29.

da cui:

$$\frac{n}{\sqrt{A_0}} = \frac{1}{2}\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)},$$

la quale può dedursi anche dalla seconda delle formole superiori, essendo

$$\frac{\wp'(v) + \wp'(2v)}{\wp(v) - \wp(2v)} = \frac{\wp''(v)}{\wp'(v)}$$

(HALPHEN, l. c., pag. 107).

Ora $n = A_0 a_0 + A_1$, si avrà quindi per la radice a_0 il valore:

$$a_0 = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{1}{2\sqrt{A_0}}\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)},$$

e per esso la formola di trasformazione diventa:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{1}{\sqrt{A_0}}\left[\frac{1}{2}\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)} + \frac{\wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right].$$

La formola di trasformazione (1) dà:

$$s = m + \frac{l}{x - a_0};$$

ma:

$$l = \frac{A_0}{4}a(a_0 - a_1), \qquad m - e_1 = \frac{A_0}{4}a;$$

quindi:

$$s - e_1 = \frac{A_0}{4}a\frac{x - a_1}{x - a_0},$$

ed analogamente per $s - e_2$, $s - e_3$; si ottiene così:

$$\sqrt{f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{\sqrt{\varphi(s)\varphi(m)}}{(s - m)^2} = -\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{\wp'(u)\wp'(v)}{[\wp(u) - \wp(v)]^2},$$

ossia:

$$\sqrt{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{A_0}}[\wp(u + v) - \wp(u - v)] = \frac{dx}{du}.$$

Da quest'ultima si deducono le

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{A_0}}[\wp'(u + v) - \wp'(u - v)], \qquad f_2(x) = \wp(u + v) + \wp(u - v),$$

e per le medesime i valori dei due covarianti di $f(x)$:

$$h(x) = ff_2 - f_1^2, \qquad t(x) = 2(fh_1 - hf_1), \qquad \left(h_1 = \frac{1}{4}\frac{dh}{dx}\right)$$

trovansi essere:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = -\wp(2u), \qquad \frac{t(x)}{f(x)\sqrt{f(x)}} = \wp'(2u),$$

le quali conducono alla nota trasformazione del sig. HERMITE.

3. Dalla relazione superiore

$$\frac{D}{A_0} = \frac{n^2}{A_0} - 2m,$$

si ha:

$$\frac{D}{A_0^2} = \frac{1}{16}[(a_0 - a_1)^2 + (a_0 - a_2)^2 + (a_0 - a_3)^2] - \frac{1}{24}(a + b + c);$$

quindi:

$$\frac{1}{A_0}\left(\frac{D}{A_0} - e_1\right) = \frac{1}{16}[(a_0 - a_1)^2 + (a_0 - a_2)^2 + (a_0 - a_3)^2 + 2a - 2b - 2c],$$

ossia:

$$\frac{1}{A_0}\left(\frac{D}{A_0} - e_1\right) = \frac{1}{16}(a_0 + a_1 - a_2 - a_3)^2;$$

ma:

$$\frac{D}{A_0} - e_1 = \wp(w) - e_1 = \frac{\sigma_1^2(w)}{\sigma^2(w)}.$$

Si ottengono così le tre relazioni:

$$a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = -\frac{4}{\sqrt{A_0}}\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)},$$

$$a_0 + a_2 - a_3 - a_1 = -\frac{4}{\sqrt{A_0}}\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)},$$

$$a_0 + a_3 - a_1 - a_2 = -\frac{4}{\sqrt{A_0}}\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

ed i valori delle radici a_0, a_1, a_2, a_3 nella forma data ad essi dalla signora KOWALEVSKI nell'importante suo lavoro premiato dall'Accademia delle Scienze di Parigi *).

Moltiplicando le tre equazioni superiori per α, β, γ, ed indicando con μ la espressione

$$\mu = (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2),$$

*) KOWALEVSKI, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* [Acta Mathematica, t. XII (1889), pp. 177-232 (pp. 194-196)].

si ha:

$$\mu = \frac{8}{A_0\sqrt{A_0}} \cdot \frac{1}{\sigma(w)}[(e_2 - e_3)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(w)].$$

In secondo luogo, moltiplicando quelle stesse equazioni per $\alpha(\beta - \gamma)$, $\beta(\gamma - \alpha)$, $\gamma(\alpha - \beta)$ e sommandole, si ottiene:

$$\mu m = -\frac{8}{A_0\sqrt{A_0}} \cdot \frac{1}{\sigma(w)}[(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w)].$$

Da ultimo moltiplicando fra loro le α, β, γ, trovasi:

$$\mu l = -\frac{16}{A_0^2}(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) = -\frac{16}{A_0^2}E;$$

ponendo quindi:

$$h_0 = \frac{1}{\sigma(w)}[\sigma_1(w) + \sigma_2(w) + \sigma_3(w)],$$

$$h_1 = \frac{1}{\sigma(w)}[(e_2 - e_3)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(w)],$$

$$h_2 = \frac{1}{\sigma(w)}[(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w)],$$

la formula di trasformazione (1) dà:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} - \frac{h_0}{\sqrt{A_0}} - \frac{2}{\sqrt{A_0}}\frac{E}{h_1\wp(u) + h_2}.$$

4. Consideriamo due trasformazioni analoghe alla (1):

$$x_1 = a_0 + \frac{l}{\wp(u_1) - m}, \qquad x_2 = a_0 + \frac{l}{\wp(u_2) - m};$$

si avranno le

$$\wp(u_1) + \wp(u_2) = \frac{2m x_1 x_2 + (l - 2a_0 m)(x_1 + x_2) + 2a_0(a_0 m - l)}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)},$$

$$\wp(u_1) - \wp(u_2) = -l\frac{x_1 - x_2}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)},$$

$$\wp(u_1)\wp(u_2) = \frac{m^2 x_1 x_2 + m(l - a_0 m)(x_1 + x_2) + (l - a_0 m)^2}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)}.$$

Dalle note relazioni *)

$$\wp(u_1 + u_2) = \frac{f(x_1, x_2) - \sqrt{f(x_1)f(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2},$$

$$\wp(u_1 - u_2) = \frac{f(x_1, x_2) + \sqrt{f(x_1)f(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2},$$

nelle quali

$$f(x_1, x_2) = x_2^2(A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 + A_2) + 2x_2(A_1 x_1^2 + 2A_2 x_1 + A_3) + A_2 x_1^2 + 2A_3 x_1 + A_4,$$

osservando essere

$$f(x_1, x_2) - 2e_1(x_1 - x_2)^2 = \frac{A_0}{2}[\varphi_1(x_1)\psi_1(x_2) + \varphi_1(x_2)\psi_1(x_1)],$$

posto

$$\varphi_1(x_1) = (x_1 - a_0)(x_1 - a_1), \qquad \psi_1(x_1) = (x_1 - a_2)(x_1 - a_3),$$

deducesi pel valore della espressione

$$P_1 = \sqrt{\wp(u_1 + u_2) - e_1}\sqrt{\wp(u_1 - u_2) - e_1}$$

il seguente:

$$P_1 = A_0 \frac{\varphi_1(x_1)\psi_1(x_2) - \varphi_1(x_2)\psi_1(x_1)}{4(x_1 - x_2)^2},$$

ossia:

$$P_1 = \frac{A_0}{4(x_1 - x_2)^2}[(a_0 + a_1 - a_2 - a_3)x_1 x_2 + (a_2 a_3 - a_0 a_1)(x_1 + x_2) + a_0 a_1(a_2 + a_3) - a_2 a_3(a_0 + a_1)],$$

ed analogamente pei valori di P_2, P_3.

Moltiplicando questi valori per α, β, γ e sommando, si ottiene dapprima:

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \frac{1}{2}\mu A_0 \frac{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)}{x_1 - x_2};$$

ma:

$$\alpha = -\frac{4}{A_0}(e_2 - e_3), \quad \dots \quad \mu l = -\frac{16}{A_0^2}E,$$

come si è trovato sopra; si avrà quindi:

$$\wp(u_1) - \wp(u_2) = \frac{-2E}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3}.$$

Così, moltiplicando quei tre valori per $\alpha(\beta - \gamma)$, $\beta(\gamma - \alpha)$, $\gamma(\alpha - \beta)$ e som-

*) KLEIN, *Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen* [Mathematische Annalen, t. XXVII (1886), pp. 431-464 (§ 12)].

mando, si giunge alla

$$\wp(u_1)+\wp(u_2)=-2\frac{(e_2^2-e_3^2)P_1+(e_3^2-e_1^2)P_2+(e_1^2-e_2^2)P_3}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3}.$$

Infine, moltiplicando quei tre valori per $\alpha(\alpha^2+5\beta\gamma)$, $\beta(\beta^2+5\gamma\alpha)$, $\gamma(\gamma^2+5\alpha\beta)$, e sommando, si ottiene:

$$\wp(u_1)\wp(u_2)=-\frac{(e_2-e_3)(e_1^2+e_2e_3)P_1+(e_3-e_1)(e_2^2+e_3e_1)P_2+(e_1-e_2)(e_3^2+e_1e_2)P_3}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3},$$

formole esse pure dovute alla signora Kowalevski (l. c., pag. 211).

Per le formole stesse il coefficiente di P_1 nel numeratore della espressione

$$[\wp(u_1)-m][\wp(u_2)-m]$$

è il seguente:

$$(e_2-e_3)(m^2-2me_1-e_1^2-e_2e_3)$$

$$=(e_2-e_3)[(m-e_1)(2m+e_1)-(m-e_2)(m-e_3)],$$

ossia per le relazioni (2):

$$=\frac{A_0^2}{16}(e_2-e_3)(ab+ca-bc)=-\sqrt{A_0}.l(e_2-e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)};$$

e il coefficiente di P_1 nel numeratore della espressione

$$a_0[\wp(u_1)-m][\wp(u_2)-m]+\tfrac{1}{2}l[\wp(u_1)+\wp(u_2)]-lm$$

è il seguente:

$$\frac{A_0}{4}l(e_2-e_3)(a_0a_1-a_2a_3)=l(e_2-e_3)\left[\frac{A_1}{\sqrt{A_0}}\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)}-\frac{\sigma_2(w)\sigma_3(w)}{\sigma^2(w)}\right];$$

quindi, posto

$$L=(e_2-e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)},\qquad L_1=(e_2-e_3)\frac{\sigma_2(w)\sigma_3(w)}{\sigma^2(w)},$$

$$M=(e_3-e_1)\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)},\qquad M_1=(e_3-e_1)\frac{\sigma_3(w)\sigma_1(w)}{\sigma^2(w)},$$

$$N=(e_1-e_2)\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\qquad N_1=(e_1-e_2)\frac{\sigma_1(w)\sigma_2(w)}{\sigma^2(w)},$$

si hanno le

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{A_1}{A_0}+\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{L_1P_1+M_1P_2+N_1P_3}{LP_1+MP_2+NP_3},$$

$$\frac{x_1 - x_2}{2} = -\frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{E}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

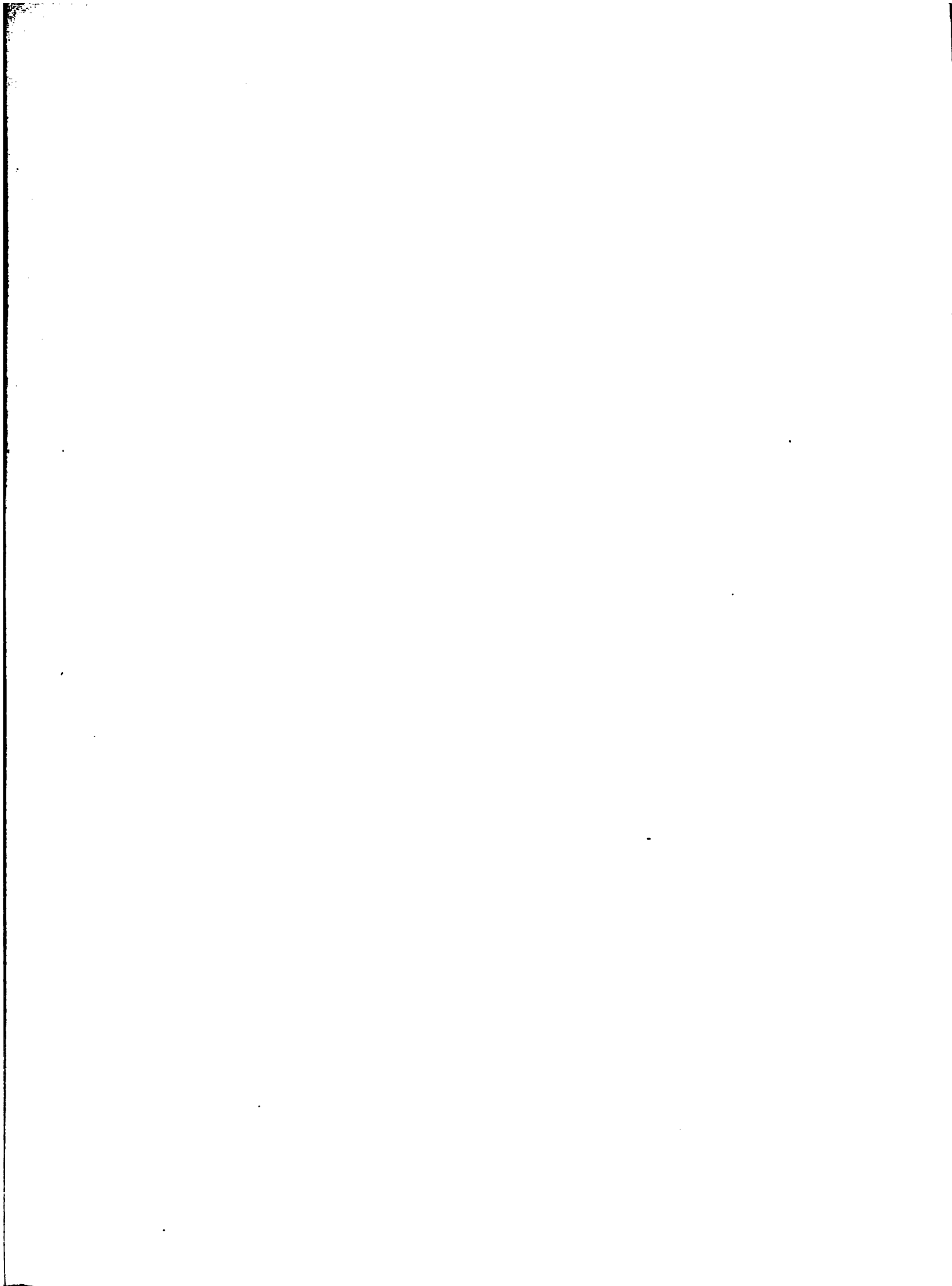
alle quali corrispondono le equazioni differenziali:

$$\frac{ds_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}},$$

$$\frac{ds_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}} = -\frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}},$$

essendo

$$s_1 = \wp(u + v), \qquad s_2 = \wp(u - v).$$

12 aprile 1891.

CLXIV.

IL RISULTANTE DI DUE FORME BINARIE BIQUADRATICHE E LA RELAZIONE FRA GL'INVARIANTI SIMULTANEI DI ESSE.

Lettera di F. BRIOSCHI ad E. D'OVIDIO *).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, volume XXXI (1895-96), pp. 441-446.

Preg.^{mo} Collega,

Il prof. BERTINI nel 1877 **), Ella nel 1880 ***), si occuparono del sistema simultaneo di due forme binarie biquadratiche, e delle relazioni o sigizie esistenti fra gli

*) Mi tengo onorato di comunicare all'Accademia, da parte dell'autore, la seguente lettera direttami dal socio Sen. F. BRIOSCHI, nella quale l'illustre scienziato, applicando un suo recente ed importante teorema, perviene con rapidità ed eleganza a trovare simultaneamente il risultante di due forme binarie biquadratiche, espresso mediante i loro invarianti fondamentali e la relazione esistente fra gl'invarianti medesimi. Altre notizie circa quest'ultima relazione, oltre quelle accennate dall'autore, si trovano nella mia Nota: *Sopra alcune classi di sigizie binarie* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXVIII (1892-93), pp. 447-451]. Ivi osservai che la relazione, nella forma datale dall'egregio sig. B^{ne} von GALL, certamente conteneva un fattore superfluo, e sospettai che questo fosse D (secondo la notazione, da lui e da me adottata); e così credette poscia anche il von GALL. Ma qui il Prof. BRIOSCHI trova che il fattore superfluo è $D - \frac{1}{6} i \iota$ (secondo la mia notazione), ossia $D - \frac{1}{6} A \mathrm{A}$ (secondo la notazione del von GALL).

E. D'O.

**) BERTINI, *Sistema simultaneo di due forme biquadratiche binarie* [Giornale di Matematiche, t. XIV (1876), pp. 1-13; Mathematische Annalen, t. XI (1877), pp. 30-40].

***) D'OVIDIO, *Sopra due covarianti simultanei di due forme binarie biquadratiche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XV (1879-80), pp. 301-304]; *Il risultante di due forme binarie biquadratiche espresso mediante i loro invarianti fondamentali* [Ibid. ibid., pp. 385-389]; *La relazione fra gli otto invarianti fondamentali di due forme binarie biquadratiche* [Ibid. ibid., pp. 471-488].

invarianti ed i covarianti simultanei delle forme stesse. Nel volume XV degli Atti di codesta accademia, Ella ha fatto conoscere la relazione esistente fra gli otto invarianti simultanei delle due forme, relazione di sesto grado rispetto ai coefficienti dell'una e dell'altra forma. Il BERTINI, iniziatore di queste ricerche, aveva già dimostrato che una sola relazione poteva esistere fra quegli invarianti; ma, rispetto al grado di essa, i risultati non coincidevano; mentre pel BERTINI saliva al dodicesimo, per Lei, come già dissi al sesto, e più tardi, cioè nel 1888, il sig. von GALL *) la dichiarava dell'ottavo grado.

Un teorema che ho di recente comunicato alla Società Scientifica di Erlangen **), sulle soluzioni comuni a due equazioni, potendo trovare opportuna applicazione anche a ricerche di questa specie, mi indusse a ritornare sull'argomento, nello scopo altresì di chiarire con un esempio il nuovo metodo.

Come si vedrà più avanti, questo metodo conduce direttamente all'unica relazione esistente fra gli otto invarianti simultanei, e questa relazione è del sesto grado. Ma prima parmi opportuno dimostrare che la relazione del sig. von GALL non è che apparentemente del grado ottavo, ma che essa riducesi al sesto, e precisamente a quella già da Lei calcolata ***).

Sieno φ, ψ le due forme binarie biquadratiche, ed a, c i due covarianti di esse:

$$a = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \qquad c = \tfrac{1}{2}(\psi\psi)_2.$$

Definisco gli otto invarianti simultanei come segue:

$$A = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_4, \qquad C = \tfrac{1}{2}(\psi\psi)_4, \qquad E = (\varphi\psi)_4, \qquad K = (ac)_4,$$

$$D = (\varphi c)_4, \qquad \Delta = (\psi a)_4, \qquad G = (\varphi a)_4, \qquad H = (\psi c)_4,$$

e pongo:

$$6K - AC = P, \qquad E^2 - 4AC = Q,$$

$$2(H\Delta - D^2) = U, \qquad D\Delta - GH = V, \qquad 2(GD - \Delta^2) = W,$$

inoltre:

$$l = P - \tfrac{1}{2}Q, \qquad m = -DE + C\Delta + AH, \qquad n = \Delta E - AD - CG,$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{3}CP + U, \qquad \mu = \tfrac{1}{6}EP + V, \qquad \nu = -\tfrac{1}{3}AP + W.$$

*) von GALL, *Die Grundsyzyganten zweier simultanen biquadratischen binären Formen* [Mathematische Annalen, t. XXXIV (1889), pp. 332-353].

**) BRIOSCHI, *Sur les invariants de deux formes binaires à facteur commun* [Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Societät in Erlangen, Heft 25 (1895), pp. 116-118].

***) Con analoga calcolazione, ma più complicata, può ottenersi il medesimo risultato per la relazione del prof. BERTINI.

Indico infine con L e con M i due determinanti

$$L = \begin{vmatrix} A & E & C \\ G & 2\Delta & D \\ \Delta & 2D & H \end{vmatrix} = AU + EV + CW, \qquad M = \begin{vmatrix} l & m & n \\ m & \lambda & \mu \\ n & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

ed osservo che

$$\frac{1}{2} L^2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}Q & m & n \\ m & U & V \\ n & V & W \end{vmatrix},$$

è eguale cioè al determinante M nel quale siasi posto $P = 0$. Ora la espressione, denominata R nella citata memoria del sig. von Gall, è la seguente:

$$R = \frac{1}{3} P^2 - \frac{1}{3.4} QP + \frac{1}{2} L;$$

risulta quindi che nella sua relazione

$$2R^2 - M = 0$$

i termini indipendenti da P spariscono, e la relazione stessa divisa per P diviene del sesto grado. Essa prende così la semplice forma:

$$8P^3 - 3QP^2 + 3.4(3P - Q)L - 3^2.4(UW - V^2)$$
$$- 3.4(Am^2 + Emn + Cn^2) = 0.$$

A questa relazione si giunge direttamente nel seguente modo. Supponiamo che le equazioni $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ ammettano una soluzione comune y, e sia:

$$\varphi(x) = (x - y)\,\alpha(x), \qquad \psi(x) = (x - y)\,\beta(x).$$

Pel teorema che ho sopra citato, un invariante simultaneo delle forme φ, ψ, invariante (p, q, o), si esprime in funzione di invarianti e covarianti simultanei delle forme α, β, funzione $(p, q, p + q)$.

Infatti, fra le 26 forme, le quali costituiscono il sistema completo di due simultanee forme cubiche, considerando le undici

$$\alpha,\ \beta,\ h = \frac{1}{2}(\alpha\alpha)_2,\quad g = (\alpha\beta)_2,\quad k = \frac{1}{2}(\beta\beta)_2,\quad \vartheta = (\alpha\beta),$$
$$t = 2(\alpha h),\quad \tau = 2(\beta k),\quad u = 2(\alpha k),\quad v = 2(\beta h),\quad J = (\alpha\beta)_3,$$

cioè dieci covarianti ed un invariante, trovasi che i valori degli otto invarianti simultanei delle forme biquadratiche φ, ψ sono:

$$A = -\tfrac{3}{4}h, \qquad E = -\tfrac{3}{4}g, \qquad C = -\tfrac{3}{4}k,$$

$$D = \frac{1}{4^2}(J\beta - 3u), \qquad \Delta = -\frac{1}{4^2}(J\alpha + 3v),$$

$$G = -\frac{3}{4^2}t, \qquad H = -\frac{3}{4^2}\tau, \qquad K = -\frac{1}{2.4^2}J\vartheta + \frac{3}{4^4}(3g^2 - 4hk),$$

nei quali covarianti alla x intendesi sostituita la soluzione comune y.

Ora il sig. von GALL ha dimostrato *) che fra quelle undici forme sussistono le quattro relazioni:

$$t\beta - v\alpha - 2h\vartheta = 0, \qquad \tau\alpha - u\beta + 2k\vartheta = 0,$$

$$\vartheta^2 = g\alpha\beta - k\alpha^2 - h\beta^2, \qquad u\alpha - v\beta = J\alpha\beta - g\vartheta,$$

e non altre.

Sostituendo nelle medesime pei sette covarianti h, g, k, u, v, t, τ i valori dedotti dalle equazioni superiori, si deducono quattro relazioni fra gli otto invarianti A, E, C,... e le $J\alpha$, $J\beta$; e quindi dalla eliminazione di queste ultime, due relazioni fra gli otto invarianti. L'una di esse è del quarto grado (4, 4, 0), ed è il valore del risultante delle due forme φ, ψ, da Lei pubblicato negli Atti di codesta Accademia nel gennaio del 1880, risultante che nel caso attuale deve annullarsi. L'altra è la relazione (6, 6, 0) fra gli otto invarianti simultanei, della quale già dissi sopra.

Posto

$$J\alpha = 4p, \qquad J\beta = 4q, \qquad T = \tfrac{8}{3}P - Q,$$

nell'ultima delle quali le P, Q hanno i valori indicati sopra, le quattro relazioni sono:

$$p^2 + 4\Delta p - 4Gq = AT,$$

$$q^2 - 4Dq + 4Hp = CT,$$

$$Cp^2 - Epq + Aq^2 = \frac{3}{4^2}T^2, \qquad pq = \frac{1}{2}ET + 4(\Delta q - Dp).$$

Sostituendo nella terza i valori di p^2, pq, q^2 dati dalle altre tre, si ottiene la

$$mp + nq = -\frac{1}{4^3}T(3T + 8Q),$$

*) von GALL, *Die irreducibeln Syzyganten zweier simultanen cubischen Formen* [Mathematische Annalen, t. XXXI (1888), pp. 424-440 (pag. 438)].

e dalla eliminazione delle $p^2 q$, $p q^2$ le altre due relazioni lineari:

$$4 T m = (4^2 U + T C) p + (4^2 V - \tfrac{1}{2} T E) q,$$

$$4 T n = (4^2 V - \tfrac{1}{2} T E) p + (4^2 W + T A) q.$$

Moltiplicando la prima di queste per p, la seconda per q, osservando essere

$$U p^2 + 2 V p q + W q^2 = T L,$$

si giunge per la precedente alla

$$3 T^2 + 4 T Q + 2.4^3 L = 0,$$

o sostituendo il valore di T, alla

$$P^2 - \frac{1}{4} P Q - \frac{3}{4^3} Q^2 + 6 L = 0$$

risultante delle due forme φ, ψ.

La eliminazione delle p, q, riconduce alla relazione (6, 6, 0), quando si tenga conto della precedente.

Aggradisca, caro Collega, i miei affettuosi saluti.

6 febbraio 1896.

CLXV.

INTORNO AD UNA TRASFORMAZIONE DELLE FORME QUADRATICHE.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, volume I (1863), pp. 26-27.

Nel mio corso di lezioni *Sulla teoria delle forme,* date nel 1860 nell'Università di Pavia, occupandomi di alcune ricerche sulle sostituzioni lineari, le quali conducono a determinate trasformazioni delle forme quadratiche, e più particolarmente di quelle sostituzioni per le quali una forma quadratica si trasforma in un'altra che contenga i soli quadrati delle variabili, esposi una dimostrazione delle formole di sostituzione per quella speciale trasformazione, la quale forma oggetto di una Nota letta dal Professore Trudi nella seduta del 22 luglio 1862 dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli *). Questa dimostrazione, molto semplice, non presupponendo che la conoscenza delle proprietà più elementari della teorica de' determinanti, credo possa trovar posto in un Giornale, il quale è *dedicato principalmente ai giovani Studiosi delle Università Italiane.*

Con la pubblicazione di questo breve lavoro intendo inoltre di fare atto di adesione al programma del giornale stesso, e di inscrivermi fra i suoi collaboratori.

Il principio sul quale fondasi la mia dimostrazione è il seguente:

Trasformando la forma quadratica ad n variabili

$$u = \sum a_{r,s} x_r x_s \quad \text{dove} \quad a_{r,s} = a_{s,r}, \tag{1}$$

*) Trudi, *Intorno ad una trasformazione delle forme quadratiche* [Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1862, pp. 113-118].

mediante la sostituzione lineare

$$x_r = p_{r,1} y_1 + p_{r,2} y_2 + \cdots + p_{r,n} y_n, \tag{2}$$

i coefficienti $p_{r,s}$, *in numero* n^2, *dovranno soddisfare a tante equazioni quanti sono i coefficienti che nella trasformata si suppongono avere un valore determinato e conosciuto.*

Suppongasi la trasformata essere

$$u = \sum_1^n q_r y_r^2, \tag{3}$$

e le $q_1, q_2, \ldots, q_n$ indeterminate; i coefficienti di questa trasformata aventi un valore determinato e conosciuto (zero) saranno in numero $\frac{n(n-1)}{2}$; e quindi i coefficienti $p_{r,s}$ della sostituzione dovranno appunto soddisfare ad $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni. Ne segue che un numero $\frac{n(n+1)}{2}$ dei medesimi si potranno determinare ad arbitrio. Scelgo per maggior semplicità gli $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficienti $p_{r,s}$ pe' quali $s < r$ ed $r = 1, 2, \ldots n$, e li suppongo uguali a zero; ed inoltre gli n coefficienti $p_{r,r}$, i quali suppongo eguali all'unità.

In conseguenza di queste ipotesi, se si ponga

$$P = \sum (\pm p_{1,1} p_{2,2} \cdots p_{n,n}), \quad \text{e} \quad P_{r,s} = \frac{\partial P}{\partial p_{r,s}},$$

per note proprietà de' determinanti si avrà

$$P = 1, \quad P_{r,r} = 1, \quad P_{s,r} = 0, \quad (s < r).$$

Ciò premesso, sostituendo nella (1) in luogo di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le espressioni (2), e confrontando il risultamento con la trasformata (3), si hanno le

$$\begin{cases} h_{1,r} p_{1,s} + h_{2,r} p_{2,s} + \cdots + h_{n,r} p_{n,s} = 0, \\ h_{1,r} p_{1,r} + h_{2,r} p_{2,r} + \cdots + h_{n,r} p_{n,r} = q_r, \end{cases} \tag{4}$$

essendosi messo per brevità

$$a_{1,s} p_{1,r} + a_{2,s} p_{2,r} + \cdots + a_{n,s} p_{n,r} = h_{s,r}; \tag{5}$$

ma, risolvendo rispetto ad $h_{s,r}$ le n equazioni che si ottengono dalle (4) ponendo successivamente $s = 1, 2, \ldots n$, si ha

$$h_{s,r} = \frac{q_r}{P} P_{s,r};$$

e perciò la (5) diviene

$$a_{1,s}p_{1,r} + a_{2,s}p_{2,r} + \cdots + a_{n,s}p_{n,r} = \frac{q_r}{P} P_{s,r}.$$

Questa formola, facendovi $s = 1, 2, \ldots r$, e tenendo presenti le ipotesi già fatte intorno alle $p_{r,s}$, porge il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} a_{1,1}p_{1,r} + a_{2,1}p_{2,r} + \cdots + a_{r,1}p_{r,r} &= 0 \\ a_{1,2}p_{1,r} + a_{2,2}p_{2,r} + \cdots + a_{r,2}p_{r,r} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,r}p_{1,r} + a_{2,r}p_{2,r} + \cdots + a_{r,r}p_{r,r} &= q_r, \end{aligned}$$

dalle quali, ponendo

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix},$$

si ottengono le

$$\Delta_r p_{r,r} = q_r \Delta_{r-1}, \qquad \Delta_r p_{s,r} = q_r \frac{\partial \Delta_r}{\partial a_{s,r}};$$

e ne risulta

$$q_r = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}, \qquad p_{s,r} = \frac{1}{\Delta_{r-1}} \frac{\partial \Delta_r}{\partial a_{s,r}}, \qquad (s < r).$$

Dunque la forma quadratica (1), per mezzo della sostituzione lineare

$$x_r = y_r + \frac{1}{\Delta_r}\frac{\partial \Delta_{r+1}}{\partial a_{r,r+1}} y_{r+1} + \frac{1}{\Delta_{r+1}}\frac{\partial \Delta_{r+2}}{\partial a_{r,r+2}} y_{r+2} + \cdots + \frac{1}{\Delta_{n-1}}\frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{r,n}} y_n,$$

trasformasi nella

$$u = \sum_1^n \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} y_r^2.$$

Milano, 12 gennaio 1863.

CLXVI.

SOPRA UNA PROPRIETÀ DELLE FORME TERNARIE.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, volume I (1863), pp. 65-67.

Una funzione omogenea u dell'n^{mo} grado di tre indeterminate x_1, x_2, x_3 denominasi *forma ternaria dell'ordine n*. Consideriamo una seconda forma ternaria v dell'ordine m, e poniamo

$$u_r = \frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x_r}, \qquad u_{rs} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s},$$

$$v_r = \frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial x_r}, \qquad v_{rs} = \frac{1}{m(m-1)}\frac{\partial^2 v}{\partial x_r \partial x_s};$$

pel teorema di EULERO *) si avranno le identità:

$$u_1 = x_1 u_{11} + x_2 u_{12} + x_3 u_{13},$$

$$u_2 = x_1 u_{21} + x_2 u_{22} + x_3 u_{23},$$

$$u_3 = x_1 u_{31} + x_2 u_{32} + x_3 u_{33};$$

$$v_1 = x_1 v_{11} + x_2 v_{12} + x_3 v_{13},$$

$$v_2 = x_1 v_{21} + x_2 v_{22} + x_3 v_{23},$$

$$v_3 = x_1 v_{31} + x_2 v_{32} + x_3 v_{33};$$

*) Vedi la *Teoria dei Determinanti* del Prof. TRUDI, Napoli, 1862; pag. 218.

$$u = x_1^2 u_{11} + x_2^2 u_{22} + x_3^2 u_{33} + 2 x_2 x_3 u_{23} + 2 x_3 x_1 u_{31} + 2 x_1 x_2 u_{12},$$

$$v = x_1^2 v_{11} + x_2^2 v_{22} + x_3^2 v_{33} + 2 x_2 x_3 v_{23} + 2 x_3 x_1 v_{31} + 2 x_1 x_2 v_{12}.$$

Ciò premesso, fissiamo l'attenzione sopra alcuni simboli i quali ci saranno utili in seguito, e sono di molto uso nella teorica delle forme ternarie. Essi sono:

$$(\alpha\beta)^{11} = \alpha_{22}\beta_{33} + \alpha_{33}\beta_{22} - 2\alpha_{23}\beta_{23},$$

$$(\alpha\beta)^{22} = \alpha_{33}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{33} - 2\alpha_{31}\beta_{31},$$

$$(\alpha\beta)^{33} = \alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11} - 2\alpha_{12}\beta_{12},$$

$$(\alpha\beta)^{23} = \alpha_{12}\beta_{13} + \alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{11}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{11},$$

$$(\alpha\beta)^{31} = \alpha_{23}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{23} - \alpha_{22}\beta_{31} - \alpha_{31}\beta_{22},$$

$$(\alpha\beta)^{12} = \alpha_{31}\beta_{32} + \alpha_{32}\beta_{31} - \alpha_{33}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{33},$$

ne' quali $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$, $\beta_{rs} = \beta_{sr}$, e quindi $(\alpha\beta)^{rs} = (\alpha\beta)^{sr}$.

Ora dalle identità superiori si deducono facilmente le seguenti:

$$u v_{11} + v u_{11} - 2 u_1 v_1 = x_2^2 (uv)^{33} + x_3^2 (uv)^{22} - 2 x_2 x_3 (uv)^{23},$$

$$u v_{22} + v u_{22} - 2 u_2 v_2 = x_3^2 (uv)^{11} + x_1^2 (uv)^{33} - 2 x_3 x_1 (uv)^{31};$$

$$u v_{33} + v u_{33} - 2 u_3 v_3 = x_1^2 (uv)^{22} + x_2^2 (uv)^{11} - 2 x_1 x_2 (uv)^{12};$$

ed anche le

$$u v_{23} + v u_{23} - (u_2 v_3 + u_3 v_2) = - x_2 x_3 (uv)^{11} + x_3 x_1 (uv)^{12} + x_1 x_2 (uv)^{13} - x_1^2 (uv)^{23},$$

$$u v_{31} + v u_{31} - (u_3 v_1 + u_1 v_3) = - x_3 x_1 (uv)^{22} + x_1 x_2 (uv)^{23} + x_2 x_3 (uv)^{21} - x_2^2 (uv)^{31},$$

$$u v_{12} + v u_{12} - (u_1 v_2 + u_2 v_1) = - x_1 x_2 (uv)^{33} + x_2 x_3 (uv)^{31} + x_3 x_1 (uv)^{32} - x_3^2 (uv)^{12}.$$

Se con U, V si indicano due altre forme ternarie degli ordini N, M, e si ponga

$$U_r = \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial x_r}, \qquad U_{rs} = \frac{1}{N(N-1)}\frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s},$$

$$V_r = \frac{1}{M}\frac{\partial V}{\partial x_r}, \qquad V_{rs} = \frac{1}{M(M-1)}\frac{\partial^2 V}{\partial x_r \partial x_s},$$

si otterranno sei identità analoghe alle precedenti; e se queste ultime si moltiplichino ordinatamente per $(UV)^{11}$, $(UV)^{22}$, $(UV)^{33}$, $2(UV)^{23}$, $2(UV)^{31}$, $2(UV)^{12}$, e si

faccia la somma de' prodotti, si avrà l'identità

$$u\sum (UV)^{rs} v_{rs} + v\sum (UV)^{rs} u_{rs} - 2\sum (UV)^{rs} u_r v_s$$
$$= x_1 x_1 [(uv)(UV)]^{11} + x_2 x_2 [(uv)(UV)]^{22} + x_3 x_3 [(uv)(UV)]^{33}$$
$$+ 2x_2 x_3 [(uv)(UV)]^{23} + 2x_3 x_1 [(uv)(UV)]^{31} + 2x_1 x_2 [(uv)(UV)]^{12},$$

nella quale l'interpretazione del simbolo Σ non presenta difficoltà; ed il simbolo $[(uv)(UV)]^{rs}$ si ottiene dal simbolo $(\alpha\beta)^{rs}$ ponendo in luogo di α e di β i simboli (uv), (UV). Ora il secondo membro di quest'ultima identità non si muta permutando le u, v colle U, V; quindi il primo membro della medesima eguaglierà la espressione risultante dall'eseguire su di esso la sudetta permutazione; cioè si avrà:

$$(1)\quad \begin{cases} u\sum (UV)^{rs} v_{rs} + v\sum (UV)^{rs} u_{rs} - 2\sum (UV)^{rs} u_r v_s \\ = U\sum (uv)^{rs} V_{rs} + V\sum (uv)^{rs} U_{rs} - 2\sum (uv)^{rs} U_r V_s. \end{cases}$$

Questa relazione fra le quattro forme ternarie u, v, U, V dà luogo a varie applicazioni tanto analitiche che geometriche. L'analoga relazione pel caso particolare nel quale $U = V$, $u = v$ fu già data dal signor HESSE nel Tomo LII del *Giornale di Crelle* *). In questo caso supponendo che le equazioni $u = 0$, $U = 0$ rappresentino due coniche, le equazioni delle rispettive polari reciproche sono **):

$$\sum (uu)^{rs} U_r U_s = 0, \qquad \sum (UU)^{rs} u_r u_s = 0.$$

Indicando con w, W i primi membri, ed osservando che le espressioni

$$\sum (UU)^{rs} u_{rs}, \qquad \sum (uu)^{rs} U_{rs},$$

contenendo solo derivate del second'ordine di funzioni omogenee del secondo grado, sono costanti, la relazione superiore prende la forma

$$au + W = AU + w,$$

essendo a, A due costanti. Ora la conica $au + W = 0$ passa pei quattro punti d'intersezione delle coniche $u = 0$, $W = 0$; ed analogamente la conica $AU + w = 0$

*) HESSE, *Transformation der Gleichung der Curven 14-ten Grades, welche eine gegebene Curve 4-ten Grades in den Berührungspuncten ihrer Doppeltangenten schneiden* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII (1856), pp. 97-102].

**) TRUDI, *Teoria dei Determinanti*, (Napoli, 1862), pag. 262.

passa pei quattro punti d'intersezione delle coniche $U = 0$, $w = 0$; dunque sì l'una che l'altra delle due coniche $au + W = 0$, $AU + w = 0$ passerà per quegli otto punti d'intersezione, ossia per gli otto punti di contatto delle quattro tangenti comuni alle due coniche $u = 0$, $U = 0$.

Nel far uso della relazione superiore converrà tener conto delle identità seguenti facilmente dimostrabili:

$$\sum (uv)^{rs} U_{rs} = \sum (uU)^{rs} v_{rs} = \sum (Uv)^{rs} u_{rs},$$

ed osservare che, la espressione $\frac{1}{2}\sum (uu)^{rs} u_r v_s$ essendo uguale al determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & v_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & v_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & v_3 \end{vmatrix},$$

se dalla prima linea orizzontale si sottraggono la seconda, la terza, e l'ultima moltiplicate ordinatamente per x_1, x_2, x_3, si otterrà:

$$\frac{1}{2}\sum (uu)^{rs} u_r v_s = v \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} v \sum (uu)^{rs} u_{rs};$$

ed indicando con $\frac{1}{n(n-1)} h$ quest'ultimo determinante, si avrà:

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum (uu)^{rs} u_r v_s = vh = \frac{n(n-1)}{6} v \sum (uu)^{rs} u_{rs};$$

ed analogamente:

$$\frac{m(m-1)}{2}\sum (vv)^{rs} u_r v_s = uk = \frac{m(m-1)}{6} u \sum (vv)^{rs} v_{rs},$$

posto

$$k = m(m-1) \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix}.$$

Ciò premesso, se nella relazione (1) poniamo $U = V = v$, si ottiene:

$$2\sum (uv)^{rs} v_r v_s = v \sum (vv)^{rs} u_{rs} - u \sum (vv)^{rs} v_{rs} + \frac{4}{m(m-1)} uk$$

$$= v \sum (vv)^{rs} u_{rs} - \frac{2}{m(m-1)} uk ;$$

e permutando le u, v si ha:

$$2\sum (uv)^{rs} u_r u_s = u \sum (uu)^{rs} v_{rs} - v \sum (uu)^{rs} u_{rs} + \frac{4}{n(n-1)} vh$$

$$= u \sum (uu)^{rs} v_{rs} - \frac{2}{n(n-1)} vh .$$

Suppongo $n = 3$, $m = 3$, inoltre $v = h$; è noto che indicando con s, t i due invarianti di quarto e sesto grado della forma cubica u, si hanno le *)

$$\sum (uu)^{rs} h_{rs} = su , \qquad \sum (hh)^{rs} u_{rs} = 2tu - sh , \qquad k = 3s^2 u - 2th ;$$

quindi sostituendo:

$$6\sum (uh)^{rs} h_r h_s = -3sh^2 + 8tuh - 3s^2u^2 ,$$

$$6\sum (uh)^{rs} u_r u_s = 3su^2 - h^2 ,$$

dalle quali:

$$6\left[u^2 \sum (uh)^{rs} h_r h_s - h^2 \sum (uh)^{rs} u_r u_s\right] = h^4 - 6su^2h^2 + 8tu^3h - 3s^2u^4 ;$$

e siccome il secondo membro di questa equazione eguaglia il prodotto delle quattro terne di rette passanti pei punti di inflessione della cubica $u = 0$ **), si avrà per lo stesso luogo geometrico la equazione

$$u^2 \sum (uh)^{rs} h_r h_s = h^2 \sum (uh)^{rs} u_r u_s .$$

Noteremo da ultimo che le forme binarie dànno origine ad una relazione analoga alla (1).

Milano, 18 febbrajo 1863.

---

*) ARONHOLD, *Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LV (1858), pp. 97-191 (pag. 127)].

**) SALMON, *A Treatise on the Higher Plane Curves* (Dublin, 1852), art. 147, 201.

CLXVII.

LEZIONI SULLA TEORICA DELLE FUNZIONI JACOBIANE AD UN SOLO ARGOMENTO *).

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, volume II (1864), pp. 8-12, 33-39, 129-134.

Lezione I.

Definizioni, proprietà generali.

1. Denomineremo funzione Jacobiana ad un solo argomento la serie doppiamente infinita:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x,\ \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{m} (-1)^{m\nu} e^{i\pi\left[(2m+\mu)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]}, \tag{1}$$

nella quale la m può assumere i valori di tutti i numeri interi da $-\infty$ a $+\infty$ e le μ, ν possono eguagliarsi allo zero od all'unità; x è l'argomento o la variabile ed ω è una costante immaginaria il valore della quale sarà determinato in seguito.

Le funzioni Jacobiane ad un solo argomento sono quindi in numero di quattro, ossia le

$$\Theta_{0,0}(x,\ \omega), \quad \Theta_{1,1}(x,\ \omega), \quad \Theta_{0,1}(x,\ \omega), \quad \Theta_{1,0}(x,\ \omega),$$

le quali indicheremo più brevemente colle

$$\Theta_{0,0}(x), \quad \Theta_{1,1}(x), \quad \Theta_{0,1}(x), \quad \Theta_{1,0}(x)$$

allorquando non debbasi portare speciale considerazione sul parametro ω.

*) Fu questo il tema delle poche lezioni da me date nell'anno scolastico 1860-61 nell'Università di Pavia. Nel redigerle ora per la pubblicazione vi introdussi alcune modificazioni ed aggiunte.

2. Mutando nella (1) la x in $x+1$ si ha:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x+1)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{m\nu}e^{i\pi(2m+\mu)}e^{i\pi\left[(2m+\mu)x+\frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]};$$

ma $e^{2mi\pi}=1$, $e^{i\pi\mu}=(-1)^\mu$; quindi:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x+1)=(-1)^\mu\Theta_{\mu,\nu}(x).$$

Così mutando nella stessa (1) la x in $x+\omega$ si ha:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x+\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{m\nu}e^{i\pi(2m+\mu)\omega}e^{i\pi\left[(2m+\mu)x+\frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]};$$

ma cambiando in questa la m in $m-1$, il che evidentemente può sempre farsi dovendo la m prendere i valori di tutti i numeri interi da $-\infty$ a $+\infty$, si otterrà:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x+\omega)=(-1)^\nu e^{-i\pi(2x+\omega)}\Theta_{\mu,\nu}(x).$$

Da questi risultati, indicando con α, β due numeri interi, deducesi l'equazione:

$$(2)\qquad \Theta_{\mu,\nu}(x+\alpha+\beta\omega)=(-1)^{\alpha\mu+\beta\nu}e^{-i\pi\beta(2x+\beta\omega)}\Theta_{\mu,\nu}(x).$$

Ponendo nella (1) $-x$ in luogo di x si ha:

$$\Theta_{\mu,\nu}(-x)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{m\nu}e^{i\pi\left[-(2m+\mu)x+\frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]},$$

nella quale cambiando la m in $-m$, quindi la m in $m+\mu$ ottiensi:

$$(3)\qquad \Theta_{\mu,\nu}(-x)=(-1)^{\mu\nu}\Theta_{\mu,\nu}(x).$$

Le equazioni (2), (3) contengono proprietà caratteristiche delle funzioni Jacobiane ad un solo argomento. Indicando con $\Theta_{\mu,\nu}(x)$, $\Theta_{\mu_1,\nu_1}(x)$ due fra esse, per le quali sussista la congruenza

$$\alpha\mu+\beta\nu\equiv\alpha\mu_1+\beta\nu_1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

si avrà dalla (2):

$$\frac{\Theta_{\mu,\nu}(x+\alpha+\beta\omega)}{\Theta_{\mu_1,\nu_1}(x+\alpha+\beta\omega)}=\frac{\Theta_{\mu,\nu}(x)}{\Theta_{\mu_1,\nu_1}(x)},$$

cioè *il rapporto fra quelle due funzioni è doppiamente periodico, ed i periodi sono* 1, ω.

Dalla (3) deducesi che una sola delle funzioni Jacobiane, la $\Theta_{1,1}(x)$, è dispari, e quindi $\Theta_{1,1}(0)=0$.

3. Ponendo nella (1) $\mu + \mu_1$, $\nu + \nu_1$ in luogo di μ, ν trovasi facilmente

$$\Theta_{\mu+\mu_1,\nu+\nu_1}(x) = e^{i\pi\left(\mu_1 x + \frac{\omega}{4}\mu_1^2 - \frac{1}{2}\mu\nu_1\right)}\Theta_{\mu,\nu}\left(x + \frac{\mu_1\omega + \nu_1}{2}\right). \tag{4}$$

Facciasi dapprima $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = 0$, poi $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = 2$; si hanno, rammentando la (2), le

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta_{\mu+2,\nu}(x) = (-1)^\mu \Theta_{\mu,\nu}(x), \\ &\Theta_{\mu,\nu+2}(x) = \Theta_{\mu,\nu}(x), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dalle quali deducesi che qualunque sieno i valori dei numeri intieri μ, ν la (1) non dà origine che a quattro funzioni distinte.

Per la (4) si potranno esprimere quelle funzioni per una sola fra esse; infatti, supponendo per esempio $\mu = 0$, si hanno le

$$\mu_1 = 1,\quad \nu_1 = 1;\quad \Theta_{1,1}(x) = e^{i\pi\left(x+\frac{\omega}{4}\right)}\Theta_{0,0}\left(x + \frac{\omega+1}{2}\right),$$

$$\mu_1 = 1,\quad \nu_1 = 0;\quad \Theta_{1,0}(x) = e^{i\pi\left(x+\frac{\omega}{4}\right)}\Theta_{0,0}\left(x + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\mu_1 = 0,\quad \nu_1 = 1;\quad \Theta_{0,1}(x) = \Theta_{0,0}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

I valori più generali della x i quali annullano le quattro funzioni Θ si ottengono ponendo nella (4) $x + \alpha + \beta\omega$ in luogo di x, e supponendo $\mu + \mu_1 = \nu + \nu_1 = 1$ ed $x = 0$; si avrà cioè:

$$\Theta_{1-\mu_1,1-\nu_1}\left[\frac{(2\beta + \mu_1)\omega + 2\alpha + \nu_1}{2}\right] = 0;$$

quindi:

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta_{1,1}(\alpha+\beta\omega)=0,\quad \Theta_{1,0}\left(\frac{2\alpha+1}{2}+\beta\omega\right)=0,\quad \Theta_{0,1}\left(\alpha+\frac{2\beta+1}{2}\omega\right)=0, \\ &\qquad\qquad \Theta_{0,0}\left(\frac{2\alpha+1}{2}+\frac{2\beta+1}{2}\omega\right)=0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Finalmente, indicando per brevità con $\Theta_{0,0}$, $\Theta_{0,1}$, $\Theta_{1,0}$ i valori delle corrispondenti funzioni Jacobiane per $x = 0$, si hanno pure dalla (4) le

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta_{0,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \Theta_{0,0},\quad \Theta_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = i\Theta_{0,0},\quad \Theta_{0,0}\left(\frac{1}{2}\right) = \Theta_{0,1}, \\ &\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-i\pi\frac{\omega}{4}}\Theta_{0,0},\quad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -e^{-i\pi\frac{\omega}{4}}\Theta_{0,1},\quad \Theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-i\pi\frac{\omega}{4}}\Theta_{1,0}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

4. Derivando la (1) rispetto ad x due volte si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}(x)}{\partial x^2} = -\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m (-1)^{m\nu} (2m+\mu)^2 e^{i\pi\left[(2m+\mu)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]},$$

e derivandola rispetto ad ω si ha:

$$\frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}(x)}{\partial \omega} = \frac{i\pi}{4} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m (-1)^{m\nu} (2m+\mu)^2 e^{i\pi\left[(2m+\mu)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]};$$

quindi:

$$\frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}(x)}{\partial x^2} - 4i\pi \frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}(x)}{\partial \omega} = 0; \tag{8}$$

è questa un'equazione alle derivate parziali, alla quale soddisfa una qualsivoglia delle funzioni Jacobiane.

5. Il simbolo m dovendo rappresentare tutti i numeri interi da $-\infty$ a $+\infty$ si potrà porre

$$m = nr + s,$$

quando per r abbia luogo la stessa proprietà, ed s possa assumere i valori 0, 1, 2, ... $n-1$, essendo n un numero intero.

Ne segue che, indicando con $\psi(x, m)$ la espressione

$$(2m+\mu)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2 - m\nu,$$

si ha:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m e^{i\pi\psi(x,m)} = \sum_{0}^{n-1}{}_s \sum_{-\infty}^{\infty}{}_r e^{i\pi\psi(x,nr+s)},$$

cioè la serie doppiamente infinita (1) si può esprimere mediante n serie della stessa specie.

Ora, essendo

$$\psi(x, nr+s) = [2s - \mu(n-1)]\left\{x + \frac{\omega}{4}[2s - \mu(n-1)]\right\}$$

$$+ (2r+\mu)n\left\{x + \frac{\omega}{2}[2s - \mu(n-1)]\right\} + \frac{n^2\omega}{4}(2r+\mu)^2 - \nu(nr+s),$$

si avrà:

$$e^{i\pi\psi(x,nr+s)} = e^{i\pi\varphi(x,s)} e^{i\pi\left[(2r+\mu)X_s + \frac{n^2\omega}{4}(2r+\mu)^2\right]} e^{-i\pi(nr+s)\nu},$$

posto

$$\varphi(x,\, s) = [2s - \mu(n-1)]\left\{x + \frac{\omega}{4}[2s - \mu(n-1)]\right\},$$

$$X_s = n\left\{x + \frac{\omega}{2}[2s - \mu(n-1)]\right\}.$$

Quindi, se n è dispari, si ha:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x,\, \omega) = \sum_0^{n-1}{}_s (-1)^{\nu s} e^{i\pi\varphi(x,s)} \Theta_{\mu,\nu}(X_s,\, n^2\omega),$$

e se n è pari:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x,\, \omega) = \sum_0^{n-1}{}_s (-1)^{\nu s} e^{i\pi\varphi(x,s)} \Theta_{\mu,0}(X_s,\, n^2\omega).$$

Nel primo caso, spezzando la sommatoria in due parti, potrà scriversi:

$$\Theta_{\mu,\nu}(x,\, \omega) = \sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}_s (-1)^{\nu s} e^{i\pi\varphi(x,s)} \Theta_{\mu,\nu}(X_s,\, n^2\omega)$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_s (-1)^{\nu(n-s)} e^{i\pi\varphi(x,n-s)} \Theta_{\mu,\nu}(X_{n-s},\, n^2\omega);$$

ma:

$$\Theta_{\mu,\nu}(X_{n-s},\, n^2\omega) = \Theta_{\mu,\nu}(X_{-s} + n^2\omega,\, n^2\omega) = (-1)^{\nu} e^{-i\pi(2X_{-s}+n^2\omega)} \Theta_{\mu,\nu}(X_{-s},\, n^2\omega),$$

$$\varphi(x,\, n-s) = 2X_{-s} + n^2\omega + \varphi(x,\, -s);$$

quindi sostituendo si otterrà:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta_{\mu,\nu}(x,\, \omega) &= e^{i\pi\varphi(x,0)} \Theta_{\mu,\nu}(X_0,\, n^2\omega) \\ &+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_s (-1)^{\nu s} [e^{i\pi\varphi(x,s)} \Theta_{\mu,\nu}(X_s,\, n^2\omega) + e^{i\pi\varphi(x,-s)} \Theta_{\mu,\nu}(X_{-s},\, n^2\omega)], \end{aligned}\right.$$

la quale formola ha alcune importanti applicazioni, come dimostrai in una nota pubblicata nei « Comptes Rendus » dell'Accademia delle Scienze di Parigi nell'Agosto 1858 *).

---

*) BRIOSCHI, *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVII (1858), pp. 337-341].

LEZIONE II.

Relazioni algebriche fra le funzioni Jacobiane ad un solo argomento.

1. Consideriamo il prodotto di due funzioni Jacobiane

$$F(x) = \Theta_{\mu,\nu}(x) . \Theta_{\mu_1,\nu_1}(x) ;$$

per le proprietà dimostrate nella prima lezione rispetto alle funzioni stesse si avranno le equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x+1) = (-1)^{\mu+\mu_1} F(x), \\ F(x+\omega) = (-1)^{\nu+\nu_1} e^{-2i\pi(2x+\omega)} F(x), \\ F(-x) = (-1)^{\mu\nu+\mu_1\nu_1} F(x). \end{cases}$$

Queste relazioni indicano che la funzione $F(x)$ può essere rappresentata da una serie doppiamente infinita della forma:

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m (-1)^{m\nu_2} A_m e^{i\pi\left[(2m+\mu_2)x + \frac{\omega}{8}(2m+\mu_2)^2\right]},$$

nella quale A_m è un coefficiente indeterminato. Infatti da quest'ultima equazione si ha dapprima:

$$F(x+1) = (-1)^{\mu_2} F(x);$$

quindi, supponendo $A_m = A_{m-2}$:

$$F(x+\omega) = e^{-2i\pi(2x+\omega)} F(x);$$

infine nell'ipotesi $A_m = A_{-m-\mu_2}$:

$$F(-x) = (-1)^{\mu_2\nu_2} F(x).$$

Queste tre ultime equazioni coincideranno dunque colle (1), cioè il prodotto $F(x)$ potrà essere rappresentato dalla espressione (2), se saranno verificate le tre congruenze e le due equazioni seguenti:

$$\mu + \mu_1 \equiv \mu_2, \quad \nu + \nu_1 \equiv 0, \quad \mu\nu + \mu_1\nu_1 \equiv \mu_2\nu_2, \qquad (\text{mod. } 2),$$

$$A_m = A_{m-2}, \quad A_m = A_{-m-\mu_2}.$$

Dalla equazione $A_m = A_{m-2}$ deducesi che i coefficienti A_m corrispondenti a valori

di m pari, positivi o negativi, sono eguali fra loro ed eguali ad A_0; ed analogamente eguali ad A_1 tutti i coefficienti A_m corrispondenti a valori di m dispari, positivi o negativi. Indicando quindi nello sviluppo di $F(x)$ con P_{μ_2} la somma dei termini moltiplicati per A_0, e con Q_{μ_2}, la somma di quelli moltiplicati per A_1, si avrà:

$$F(x) = A_0 P_{\mu_2} + (-1)^{\nu_2} A_1 Q_{\mu_2}.$$

Osserviamo che, dovendo essere $\nu + \nu_1 \equiv 0 \pmod{2}$, cioè ν e ν_1 ambedue eguali a zero od eguali all'unità, quest'ultima equazione non dà luogo che alle due seguenti:

$$(3) \qquad \begin{cases} \Theta_{\mu,0}(x)\Theta_{\mu_1,0}(x) = A_0 P_{\mu_2} + (-1)^{\nu_2} A_1 Q_{\mu_2}, \\ \Theta_{\mu,1}(x)\Theta_{\mu_1,1}(x) = A'_0 P_{\mu_2} + (-1)^{\nu_2} A'_1 Q_{\mu_2}, \end{cases}$$

essendo per la prima di esse $\mu_2 \nu_2 \equiv 0 \pmod{2}$, e per la seconda $\mu_2 \nu_2 \equiv \mu + \mu_1 \equiv \mu_2$ (mod. 2).

Se $\mu_2 = 0$, si ha $\mu + \mu_1 \equiv 0$, ossia μ e μ_1 insieme eguali a zero od all'unità, e le due congruenze le quali debbono verificarsi per le due ultime equazioni superiori, lo sono qualunque sia ν_2; quindi l'ipotesi $\mu_2 = 0$ dà origine alle quattro equazioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Theta^2_{0,0}(x) = A_0 P_0 + A_1 Q_0, & \Theta^2_{1,0}(x) = B_0 P_0 + B_1 Q_0, \\ \Theta^2_{0,1}(x) = A'_0 P_0 + A'_1 Q_0, & \Theta^2_{1,1}(x) = B'_0 P_0 + B'_1 Q_0, \end{cases}$$

essendo A_0, B_0, A'_0, ... quantità costanti a determinarsi.

Se $\mu_2 = 1$, si ha $\mu + \mu_1 \equiv 1 \pmod{2}$, e perciò $\mu = 0$, $\mu_1 = 1$, oppure $\mu = 1$, $\mu_1 = 0$; per la prima delle (3) è $\nu_2 = 0$ e per la seconda $\nu_2 = 1$; infine $A_m = A_{m-1}$, cioè tutti i coefficienti A_m eguali fra loro; quella ipotesi darà dunque le due equazioni:

$$(5) \qquad \begin{cases} \Theta_{0,0}(x)\Theta_{1,0}(x) = C(P_1 + Q_1), \\ \Theta_{0,1}(x)\Theta_{1,1}(x) = D(P_1 - Q_1), \end{cases}$$

essendo C, D quantità costanti da determinarsi.

Le sei equazioni (4), (5), trovate supponendo il prodotto $F(x)$ esprimibile colla serie doppiamente infinita (2), si ponno porre sotto altra forma osservando che per gli sviluppi delle P_0, Q_0, P_1, Q_1 si hanno le

$$P_0 + Q_0 = \Theta_{0,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \qquad P_0 - Q_0 = \Theta_{0,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right),$$

$$P_1 + Q_1 = \Theta_{1,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \qquad P_1 - Q_1 = \Theta_{1,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right),$$

e si otterranno, indicando con a_0, a_1, b_0, ... quantità indeterminate, le sei equazioni seguenti:

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} 2\Theta^2_{0,0}(x) &= a_0\Theta_{0,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right) + a_1\Theta_{0,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \\ 2\Theta^2_{0,1}(x) &= a'_0\Theta_{0,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right) + a'_1\Theta_{0,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \\ 2\Theta^2_{1,0}(x) &= b_0\Theta_{0,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right) + b_1\Theta_{0,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \\ 2\Theta^2_{1,1}(x) &= b'_0\Theta_{0,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right) + b'_1\Theta_{0,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \\ \Theta_{0,0}(x)\Theta_{1,0}(x) = C\Theta_{1,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), &\qquad \Theta_{0,1}(x)\Theta_{1,1}(x) = D\Theta_{1,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

2. Ma il prodotto $F(x)$ può essere anche rappresentato dalla serie doppiamente infinita:

$$(7)\qquad F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{m}(-1)^{m\nu_2} A_m e^{i\pi\left[(2m+\mu_2)2x + \frac{\omega}{2}(2m+\mu_2)^2\right]},$$

giacchè si ha la

$$F(x+1) = F(x),$$

e supponendo $A_m = A_{m-1} = A_{-m-\mu_2}$:

$$F(x+\omega) = (-1)^{\nu_2} e^{-2i\pi(2x+\omega)} F(x), \qquad F(-x) = (-1)^{\mu_2\nu_2} F(x),$$

ossia dovranno sussistere le congruenze

$$\mu + \mu_1 \equiv 0, \qquad \nu + \nu_1 \equiv \nu_2, \qquad \mu\nu + \mu_1\nu_1 \equiv \mu_2\nu_2, \qquad (\text{mod. } 2)$$

e le equazioni

$$A_m = A_{m-1} = A_{-m-\mu_2}.$$

Per l'equazione $A_m = A_{m-1}$ tutti i coefficienti A_m sono eguali fra loro; e per la prima congruenza μ e μ_1 sono insieme eguali a zero od all'unità.

Si avranno perciò le equazioni:

$$\Theta_{0,\nu}(x)\Theta_{0,\nu_1}(x) = E\,\Theta_{0,\nu+\nu_1}(2x, 2\omega),$$

stante la

$$\Theta_{1,\nu}(x)\Theta_{1,\nu_1}(x) = G\,\Theta_{1,\nu+\nu_1}(2x, 2\omega),$$

e queste, non potendo essere $\nu + \nu_1 \equiv 0$ (mod. 2), (il che risulta evidente ponendo

nelle equazioni stesse $\nu = \nu_1$), daranno origine alle due:

$$(8) \qquad \begin{cases} \Theta_{0,0}(x)\Theta_{0,1}(x) = E\,\Theta_{0,1}(2x,\ 2\omega), \\ \Theta_{1,0}(x)\Theta_{1,1}(x) = G\,\Theta_{1,1}(2x,\ 2\omega). \end{cases}$$

3. Infine il prodotto $F(x)$ può essere rappresentato dalla serie

$$(9) \qquad F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{m} (-1)^{m\nu_2} A_m e^{i\pi\left[(2m+\mu_2)x + \frac{\omega+1}{8}(2m+\mu_2)^2\right]},$$

supponendo:

$$\mu + \mu_1 \equiv \mu_2, \qquad \nu + \nu_1 \equiv \mu_2, \qquad \mu\nu + \mu_1\nu_1 \equiv \mu_2\nu_2, \qquad (\text{mod. } 2),$$

$$A_m = A_{m-2} = A_{-m-\mu_2}.$$

In queste non potrà essere $\mu_2 = 0$, giacchè questa ipotesi condurrebbe all'assurdo che $\Theta^2_{\mu,\nu}(x)$ sarebbe sempre esprimibile dalla stessa serie qualunque sieno μ, ν; dunque supponendo $\mu_2 = 1$ si avrà che tutti i coefficienti A_m saranno eguali fra loro, e si otterranno le equazioni:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Theta_{0,0}(x)\Theta_{1,1}(x) = L\,\Theta_{1,1}\left(x,\ \dfrac{\omega+1}{2}\right), \\ \Theta_{0,1}(x)\Theta_{1,0}(x) = M\,\Theta_{1,0}\left(x,\ \dfrac{\omega+1}{2}\right). \end{cases}$$

Le dieci equazioni (6), (8), (10) dànno per mezzo di serie doppiamente infinite i valori di tutti i prodotti a due a due delle quattro funzioni Jacobiane. Quanto alle quantità indeterminate contenute nelle equazioni stesse, se ne potrà determinare almeno parte colle seguenti considerazioni. Se nella prima e nella terza delle equazioni (6) si muta la x in $x + \frac{1}{2}$, si hanno, per la formola (4) della lezione precedente, le

$$2\Theta^2_{0,1}(x) = a_0\Theta_{0,1}\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right) + a_1\Theta_{0,0}\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right),$$

$$-2\Theta^2_{1,1}(x) = b_0\Theta_{0,1}\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right) + b_1\Theta_{0,0}\left(x,\ \frac{\omega}{2}\right),$$

le quali poste a confronto colla seconda e quarta dànno:

$$a_0 = a'_1, \qquad a_1 = a'_0, \qquad b_0 = -b'_1, \qquad b_1 = -b'_0;$$

e siccome, cambiando nella prima la x in $x + \frac{\omega}{2}$, si ottiene

$$2\Theta_{1,0}^2(x) = a_0 \Theta_{0,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right) - a_1 \Theta_{0,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right),$$

gli otto coefficienti a_0, b_0, a_1, ... si ridurranno a due soli, cioè si avranno le

$$b_0 = a_1' = -b_1' = a_0; \qquad b_0' = a_0' = -b_1 = a_1,$$

e, ponendo $x = 0$ nella quarta delle anzidette equazioni (6), si avrà:

$$a_0 = \delta\Theta_{0,0}\left(0, \frac{\omega}{2}\right), \qquad a_1 = \delta\Theta_{0,1}\left(0, \frac{\omega}{2}\right), \tag{11}$$

essendo δ una quantità indeterminata.

Affatto analogamente si dimostreranno le relazioni:

$$C = D, \qquad E = G, \qquad L = M. \tag{12}$$

4. Dalle equazioni trovate, col mezzo delle quali si esprimono i valori dei dieci prodotti a due a due delle quattro funzioni Jacobiane, rilevasi facilmente che fra i prodotti medesimi non esistono che due relazioni, quelle cioè che ottengonsi eliminando le $\Theta_{0,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right)$, $\Theta_{0,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right)$ dalle prime quattro equazioni (6). Queste relazioni quadratiche sono le

$$\begin{vmatrix} \Theta_{0,0}^2(x) & a_0 & a_1 \\ \Theta_{0,1}^2(x) & a_1 & a_0 \\ \Theta_{1,1}^2(x) & a_1 & -a_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \Theta_{0,1}^2(x) & a_1 & a_0 \\ \Theta_{1,0}^2(x) & a_0 & -a_1 \\ \Theta_{1,1}^2(x) & a_1 & -a_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia le

$$-2a_0a_1\Theta_{0,0}^2(x) + (a_0^2 + a_1^2)\Theta_{0,1}^2(x) + (a_0^2 - a_1^2)\Theta_{1,1}^2(x) = 0,$$

$$-2a_0a_1\Theta_{1,0}^2(x) + (a_0^2 + a_1^2)\Theta_{1,1}^2(x) + (a_0^2 - a_1^2)\Theta_{0,1}^2(x) = 0.$$

Da queste, ponendo $x = 0$, deduconsi le

$$\frac{a_0^2 + a_1^2}{2a_0a_1} = \frac{\Theta_{0,0}^2}{\Theta_{0,1}^2}, \qquad \frac{a_0^2 - a_1^2}{2a_0a_1} = \frac{\Theta_{1,0}^2}{\Theta_{0,1}^2};$$

e quindi:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\Theta_{0,0}^2 + \Theta_{1,0}^2}{\Theta_{0,1}^2}, \qquad \frac{a_1}{a_0} = \frac{\Theta_{0,0}^2 - \Theta_{1,0}^2}{\Theta_{0,1}^2}, \tag{13}$$

le quali moltiplicate fra loro membro per membro dimostrano sussistere fra le $\Theta_{0,0}$, $\Theta_{0,1}$, $\Theta_{1,0}$ la relazione:

$$\Theta_{0,1}^4 + \Theta_{1,0}^4 = \Theta_{0,0}^4. \tag{14}$$

Le equazioni quadratiche superiori si ponno perciò porre sotto la forma:

$$1 + \frac{\Theta_{1,0}^2}{\Theta_{0,0}^2}\frac{\Theta_{1,1}^2(x)}{\Theta_{0,1}^2(x)} = \frac{\Theta_{0,1}^2}{\Theta_{0,0}^2}\frac{\Theta_{0,0}^2(x)}{\Theta_{0,1}^2(x)}, \qquad -\frac{\Theta_{0,0}^2}{\Theta_{1,0}^2}\frac{\Theta_{1,1}^2(x)}{\Theta_{0,1}^2(x)} + \frac{\Theta_{0,1}^2}{\Theta_{1,0}^2}\frac{\Theta_{1,0}^2(x)}{\Theta_{0,1}^2(x)} = 1.$$

Ora le espressioni

$$\frac{\Theta_{0,0}}{i\Theta_{1,0}}\frac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{0,1}(x)}, \qquad \frac{\Theta_{0,1}}{\Theta_{1,0}}\frac{\Theta_{1,0}(x)}{\Theta_{0,1}(x)},$$

la somma dei quadrati delle quali, per la seconda di queste equazioni, è eguale all'unità, hanno la proprietà che la prima si annulla per $x = 0$, l'altra per lo stesso valore di x diventa eguale ad uno. Indicando quindi con $\varphi(x)$ una funzione incognita di x, tale che $\varphi(0) = 0$, si potrà porre:

$$\frac{\Theta_{0,0}}{i\Theta_{1,0}}\frac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{0,1}(x)} = \operatorname{sen}\varphi(x), \qquad \frac{\Theta_{0,1}}{\Theta_{1,0}}\frac{\Theta_{1,0}(x)}{\Theta_{0,1}(x)} = \cos\varphi(x),$$

ed introducendo il simbolo $\operatorname{dn}\varphi(x)$, facendo cioè

$$\operatorname{dn}\varphi(x) = \frac{\Theta_{0,1}}{\Theta_{0,0}}\frac{\Theta_{0,0}(x)}{\Theta_{0,1}(x)},$$

la prima di quelle equazioni darà:

$$\operatorname{dn}^2\varphi(x) = 1 - \frac{\Theta_{1,0}^4}{\Theta_{0,0}^4}\operatorname{sen}^2\varphi(x).$$

Denomineremo per brevità con $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ i rapporti

$$\sqrt{k} = \frac{\Theta_{1,0}}{\Theta_{0,0}}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta_{0,1}}{\Theta_{0,0}}; \tag{15}$$

le quantità k, k' saranno per la (14) legate dall'equazione

$$k^2 + k'^2 = 1;$$

e si avranno le

$$
(16)\qquad
\begin{cases}
\operatorname{sen} \varphi(x) = \dfrac{1}{i\sqrt{k}} \dfrac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{0,1}(x)}, \\[2mm]
\cos \varphi(x) = \sqrt{\dfrac{k'}{k}} \dfrac{\Theta_{1,0}(x)}{\Theta_{0,1}(x)}, \\[2mm]
\operatorname{dn} \varphi(x) = \sqrt{k'} \dfrac{\Theta_{0,0}(x)}{\Theta_{0,1}(x)}.
\end{cases}
$$

Inoltre dalla prima delle (13) si avranno, indicando con ρ una quantità da determinarsi, le seguenti:

$$
(17)\qquad a_0 = \rho\sqrt{1+k}, \qquad a_1 = \rho\sqrt{1-k}.
$$

Lezione III.

Relazioni differenziali fra le funzioni Jacobiane ad un argomento.

1. Posto per brevità

$$
(1)\qquad \frac{d\Theta_{\mu,\nu}(x)}{dx} = h_{\mu,\nu}(x),
$$

si hanno, seguendo la via indicata nella Lezione I, le tre seguenti equazioni, le quali comprendono le proprietà caratteristiche delle funzioni $h_{\mu,\nu}(x)$:

$$
(2)\qquad
\begin{cases}
h_{\mu,\nu}(x+1) = (-1)^{\mu} h_{\mu,\nu}(x), \qquad h_{\mu,\nu}(-x) = (-1)^{\mu\nu+1} h_{\mu,\nu}(x), \\
h_{\mu,\nu}(x+\omega) = (-1)^{\nu} e^{-i\pi(2x+\omega)} [h_{\mu,\nu}(x) - 2i\pi\Theta_{\mu,\nu}(x)].
\end{cases}
$$

Inoltre si otterrà facilmente la

$$
h_{\mu+\mu_1,\nu+\nu_1}(x) = e^{i\pi\left(\mu_1 x + \mu_1^2 \frac{\omega}{4} - \frac{1}{2}\mu\nu_1\right)} \left[h_{\mu,\nu}\left(x + \frac{\mu_1\omega + \nu_1}{2}\right) + i\pi\mu_1 \Theta_{\mu,\nu}\left(x + \frac{\mu_1\omega+\nu_1}{2}\right)\right],
$$

ossia la

$$
(3)\quad h_{\mu,\nu}\left(x + \frac{\mu_1\omega+\nu_1}{2}\right) = e^{-i\pi\left(\mu_1 x + \mu_1^2\frac{\omega}{4} - \frac{1}{2}\mu\nu_1\right)} [h_{\mu+\mu_1,\nu+\nu_1}(x) - i\pi\mu_1\Theta_{\mu+\mu_1,\nu+\nu_1}(x)],
$$

dalla prima delle quali:

$$
h_{\mu+2,\nu}(x) = (-1)^{\nu} h_{\mu,\nu}(x), \qquad h_{\mu,\nu+2}(x) = h_{\mu,\nu}(x).
$$

Delle quattro funzioni $h_{\mu,\nu}(x)$ tre sono quindi dispari, cioè si hanno le

$$
h_{0,0} = h_{0,1} = h_{1,0} = 0;
$$

e per $h_{1,1}$ sussistono le

$$(4) \qquad h_{1,1} = i h_{1,0}\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\pi\frac{\omega}{4}} h_{0,1}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

essendo

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} & h_{0,0}\left(\frac{1}{2}\right) = h_{0,1}\left(\frac{1}{2}\right) = h_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ & h_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -i\pi e^{-i\pi\frac{\omega}{4}} \Theta_{1,0}, \\ & h_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -i\pi e^{-i\pi\frac{\omega}{4}} \Theta_{0,0}, \\ & h_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -i\pi e^{-i\pi\frac{\omega}{4}} \Theta_{0,1}. \end{aligned}\right.$$

2. Considero i due prodotti:

$$L(x) = \Theta_{\mu,\nu}(x) h_{\mu_1,\nu_1}(x), \qquad M(x) = \Theta_{\mu_1,\nu_1}(x) h_{\mu,\nu}(x);$$

evidentemente, per le relazioni superiori e per quelle dimostrate nella Lezione I, hanno luogo le

$$L(x+1) = (-1)^{\mu+\mu_1} L(x), \qquad M(x+1) = (-1)^{\mu+\mu_1} M(x),$$

$$L(x+\omega) = (-1)^{\nu+\nu_1} e^{-2i\pi(2x+\omega)} [L(x) - 2i\pi \Theta_{\mu,\nu}(x) \Theta_{\mu_1,\nu_1}(x)],$$

$$M(x+\omega) = (-1)^{\nu+\nu_1} e^{-2i\pi(2x+\omega)} [M(x) - 2i\pi \Theta_{\mu,\nu}(x) \Theta_{\mu_1,\nu_1}(x)],$$

$$L(-x) = (-1)^{\mu\nu+\mu_1\nu_1+1} L(x), \qquad M(-x) = (-1)^{\mu\nu+\mu_1\nu_1+1} M(x);$$

per cui, ponendo

$$F(x) = L(x) - M(x),$$

si avranno per le funzioni $F(x)$ le seguenti proprietà:

$$F(x+1) = (-1)^{\mu+\mu_1} F(x),$$

$$F(x+\omega) = (-1)^{\nu+\nu_1} e^{-2i\pi(2x+\omega)} F(x),$$

$$F(-x) = (-1)^{\mu\nu+\mu_1\nu_1+1} F(x).$$

La funzione $F(x)$ quindi, per quanto si è dimostrato nella Lezione II, potrà essere espressa col mezzo delle serie doppiamente infinite (2), (7), (9) della Lezione

medesima, purchè nel primo caso sussistano le

$$(\text{mod. } 2) \qquad \mu + \mu_1 \equiv \mu_2, \quad \nu + \nu_1 \equiv 0, \quad \mu\nu + \mu_1\nu_1 + 1 \equiv \mu_2\nu_2,$$
$$A_m = A_{m-2} = A_{-m-\mu_2};$$

nel secondo le

$$(\text{mod. } 2) \qquad \mu + \mu_1 \equiv 0, \quad \nu + \nu_1 \equiv \nu_2, \quad \mu\nu + \mu_1\nu_1 + 1 \equiv \mu_2\nu_2,$$
$$A_m = A_{m-1} = A_{-m-\mu_2};$$

e nel terzo le

$$(\text{mod. } 2) \qquad \mu + \mu_1 \equiv \mu_2, \quad \nu + \nu_1 \equiv \mu_2, \quad \mu\nu + \mu_1\nu_1 + 1 \equiv \mu_2\nu_2,$$
$$A_m = A_{m-2} = A_{-m-\mu_2}.$$

Ora nel primo caso non potrà essere $\mu_2 = 0$, giacchè in questa supposizione essendo $\mu = \mu_1$, ed essendo per la seconda congruenza $\nu = \nu_1$, si avrebbe dalla terza $2\mu\nu + 1 \equiv 0$; il che è assurdo. Dunque sarà $\mu_2 = 1$ e tutti i coefficienti A_m eguali fra loro; infine il valore di ν_2 si otterrà dalla $\nu_2 \equiv 1 + \nu$. Si avranno quindi le due equazioni:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Theta_{0,1}(x)h_{1,1}(x) - \Theta_{1,1}(x)h_{0,1}(x) &= C'\Theta_{1,0}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \\ \Theta_{0,0}(x)h_{1,0}(x) - \Theta_{1,0}(x)h_{0,0}(x) &= C'\Theta_{1,1}\left(x, \frac{\omega}{2}\right), \end{aligned} \right.$$

essendosi posta la costante eguale a C' nelle due equazioni, potendosi la seconda dedurre dalla prima mutando in essa la x in $x + \frac{1}{2}$.

Nel secondo caso si dimostra analogamente dover essere $\nu_2 = 1$; i coefficienti sono per l'equazione $A_m = A_{m-1}$ eguali fra loro, ed il valore di μ_2 è dato dalla congruenza $\mu_2 \equiv 1 + \mu$ (mod. 2).

Si hanno così le due equazioni:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Theta_{1,1}(x)h_{1,0}(x) - \Theta_{1,0}(x)h_{1,1}(x) &= E'\Theta_{0,1}(2x, 2\omega), \\ \Theta_{0,0}(x)h_{0,1}(x) - \Theta_{0,1}(x)h_{0,0}(x) &= E'\Theta_{1,1}(2x, 2\omega). \end{aligned} \right.$$

Finalmente nell'ultimo caso, dovendo essere $\mu_2 = 1$, tutti i coefficienti sono eguali fra loro, e si otterrebbero quattro equazioni a due a due identiche, cioè le due seguenti:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Theta_{1,0}(x)h_{0,1}(x) - \Theta_{0,1}(x)h_{1,0}(x) &= L'\Theta_{1,1}\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right), \\ \Theta_{1,1}(x)h_{0,0}(x) - \Theta_{0,0}(x)h_{1,1}(x) &= L'\Theta_{1,0}\left(x, \frac{\omega+1}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Ponendo a confronto le sei equazioni (6), (7), (8) colle ultime due (6), (8), (10) della Lezione II, si ottengono altre sei equazioni, dalle quali, ponendo $x = 0$, si deducono le

$$\frac{C'}{C} = \frac{\Theta_{0,1} h_{1,1}}{\Theta_{0,0}\Theta_{1,0}}, \quad \frac{E'}{E} = -\frac{\Theta_{1,0} h_{1,1}}{\Theta_{0,0}\Theta_{0,1}}, \quad \frac{L'}{L} = -\frac{\Theta_{0,0} h_{1,1}}{\Theta_{0,1}\Theta_{1,0}},$$

ossia ponendo

$$h_{1,1} = h\,\Theta_{0,0}\Theta_{0,1}\Theta_{1,0}, \tag{9}$$

nella quale h è una quantità indeterminata, e rammentando le denominazioni (15), si avranno:

$$\frac{C'}{C} = h k' \Theta^2_{0,0}, \quad \frac{E'}{E} = -h k \Theta^2_{0,0}, \quad \frac{L'}{L} = -h \Theta^2_{0,0}. \tag{10}$$

Le sei equazioni, alle quali abbiamo accennato, potranno quindi scriversi come segue:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{0,1}(x)}\right] = h k' \Theta^2_{0,0} \frac{\Theta_{0,0}(x)\Theta_{1,0}(x)}{\Theta^2_{0,1}(x)}, \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta_{1,0}(x)}{\Theta_{0,0}(x)}\right] = h k' \Theta^2_{0,0} \frac{\Theta_{0,1}(x)\Theta_{1,1}(x)}{\Theta^2_{0,0}(x)}, \\
&\frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{1,0}(x)}\right] = h k \Theta^2_{0,0} \frac{\Theta_{0,0}(x)\Theta_{0,1}(x)}{\Theta^2_{1,0}(x)}, \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta_{0,0}(x)}{\Theta_{0,1}(x)}\right] = h k \Theta^2_{0,0} \frac{\Theta_{1,0}(x)\Theta_{1,1}(x)}{\Theta^2_{0,0}(x)}, \\
&\frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta_{1,0}(x)}{\Theta_{0,1}(x)}\right] = h \Theta^2_{0,0} \frac{\Theta_{0,0}(x)\Theta_{1,1}(x)}{\Theta^2_{0,1}(x)}, \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{0,0}(x)}\right] = h \Theta^2_{0,0} \frac{\Theta_{0,1}(x)\Theta_{1,0}(x)}{\Theta^2_{0,0}(x)}.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

3. Dalla 1ª, 5ª, 4ª di queste, per le equazioni (16) della Lezione II, si ottengono i valori delle derivate delle funzioni $\operatorname{sen}\varphi(x)$, $\cos\varphi(x)$, $\operatorname{dn}\varphi(x)$; e si hanno le

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d \operatorname{sen}\varphi(x)}{dx} &= -i h \Theta^2_{0,0} \cos\varphi(x) \operatorname{dn}\varphi(x), \\
\frac{d \cos\varphi(x)}{dx} &= i h \Theta^2_{0,0} \operatorname{sen}\varphi(x) \operatorname{dn}\varphi(x), \\
\frac{d \operatorname{dn}\varphi(x)}{dx} &= i h \Theta^2_{0,0} k^2 \operatorname{sen}\varphi(x) \cos\varphi(x).
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

La prima e la seconda di esse dànno:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -i h \Theta^2_{0,0} \operatorname{dn}\varphi(x),$$

e pel valore di $\mathrm{dn}\,\varphi(x)$:

$$\frac{d\varphi(x)}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi(x)}} = -\,i\,h\,\Theta_{0,0}^2\,dx,$$

la quale integrata, osservando che ad $x = 0$ corrisponde $\varphi(x) = 0$, darà:

$$\int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,d\varphi = -\,i\,h\,\Theta_{0,0}^2\,x\,.$$

Per determinare la costante h notisi che pel valore di $\mathrm{sen}\,\varphi(x)$ si ha:

$$\mathrm{sen}\,\varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{i\sqrt{k}}\,\frac{\Theta_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Theta_{0,1}\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\Theta_{1,0}(0)}{\Theta_{0,0}(0)} = 1\,,$$

e quindi $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; cioè, ponendo nell'ultima equazione trovata $x = \frac{1}{2}$, si avrà:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,d\varphi = -\frac{1}{2}\,i\,h\,\Theta_{0,0}^2\,,$$

ed indicando con K l'integrale definito del primo membro si avranno le

$$h = i\,\frac{2K}{\Theta_{0,0}^2}\,,\qquad \int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,d\varphi = 2Kx\,. \tag{13}$$

Trasformando quest'ultimo integrale con supporre

$$\mathrm{tang}\,\varphi = i\,\mathrm{sen}\,\psi\,,\quad \text{e quindi}\quad d\varphi = i\,\frac{d\psi}{\cos\psi}\,,$$

si giunge alla

$$i\int_0^{\psi}\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}\,d\psi = 2Kx\,. \tag{14}$$

Ora, per le equazioni (16) della Lezione II:

$$\mathrm{tang}\,\varphi(x) = \frac{1}{i\sqrt{k'}}\,\frac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{1,0}(x)}\,;$$

quindi:

$$\mathrm{sen}\,\psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{\Theta_{1,1}(x)}{\Theta_{1,0}(x)}\,,$$

$$\mathrm{sen}\,\psi\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{\Theta_{1,0}}{\Theta_{0,0}} = 1\,;$$

dunque:

$$\psi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\pi}{2}, \qquad \text{ed} \qquad i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\psi}}\,d\psi=K\omega\,.$$

Ne risulta che, indicando con K' l'integrale definito del primo membro di quest'ultima equazione, si avrà:

$$\omega=i\frac{K'}{K}, \tag{15}$$

relazione la quale rende completamente determinata la serie doppiamente infinita da cui siamo partiti.

CLXVIII.

SULLE PROPRIETÀ DI UNA FORMA BIQUADRATICA.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, volume XXII (1884), pp. 130-132.

1. Sieno x_∞, x_0, x_1, x_2 le radici della equazione biquadratica

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x, 1)^4 = 0; \tag{1}$$

è noto che, indicando con z_0, z_1, z_2 le radici della equazione del terzo grado

$$4z^3 - g_2 z + g_3 = 0,$$

nella quale g_2, g_3 sono gl'invarianti della (1) e ponendo

$$A_0 = (a_0 z_0 - m)^{\frac{1}{2}}, \qquad A_1 = (a_0 z_1 - m)^{\frac{1}{2}}, \qquad A_2 = (a_0 z_2 - m)^{\frac{1}{2}},$$

ed $m = a_0 a_2 - a_1^2$, si hanno le

$$x_\infty = -\frac{1}{a_0}(a_1 + A_0 + A_1 + A_2),$$

$$x_0 = -\frac{1}{a_0}(a_1 + A_0 - A_1 - A_2),$$

$$x_1 = -\frac{1}{a_0}(a_1 - A_0 + A_1 - A_2),$$

$$x_2 = -\frac{1}{a_0}(a_1 - A_0 - A_1 + A_2).$$

Si indichino con u_0, u_1, u_2 le espressioni

$$(2)\qquad \begin{cases} u_0 = \frac{a_0}{4}(x_\infty - x_0)(x_1 - x_2), \\ u_1 = \frac{a_0}{4}(x_\infty - x_1)(x_2 - x_0), \\ u_2 = \frac{a_0}{4}(x_\infty - x_2)(x_0 - x_1); \end{cases}$$

si hanno facilmente le

$$u_0 = z_1 - z_2, \qquad u_1 = z_2 - z_0, \qquad u_2 = z_0 - z_1,$$

$$3z_0 = u_2 - u_1, \qquad 3z_1 = u_0 - u_2, \qquad 3z_2 = u_1 - u_0,$$

cioè le u_0, u_1, u_2 sono le radici della

$$4u^3 - 3g_2 u - d = 0,$$

posto $d^2 = g_2^3 - 27g_3^2$.

2. Consideriamo ora una seconda biquadratica

$$(3)\qquad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)(y, 1)^4 = 0,$$

e sieno y_∞, y_0, y_1, y_2 le radici di essa. Se γ_2, γ_3 sono i suoi invarianti, e t_0, t_1, t_2 le radici della equazione cubica

$$4t^3 - \gamma_2 t + \gamma_3 = 0,$$

e poniamo analogamente alle (2):

$$v_0 = \frac{\alpha_0}{4}(y_\infty - y_0)(y_1 - y_2),$$

$$v_1 = \frac{\alpha_0}{4}(y_\infty - y_1)(y_2 - y_0),$$

$$v_2 = \frac{\alpha_0}{4}(y_\infty - y_2)(y_0 - y_1),$$

si avranno le

$$v_0 = t_1 - t_2 \qquad v_1 = t_2 - t_0, \qquad v_2 = t_0 - t_1,$$

$$3t_0 = v_2 - v_1, \qquad 3t_1 = v_0 - v_2, \qquad 3t_2 = v_1 - v_0.$$

Suppongasi che fra le radici x_s, y_s sussista la relazione

$$y_s = \frac{\alpha x_s^3 + \beta}{\gamma x_s^3 + \delta}, \tag{4}$$

nella quale α, β, γ, δ sono quattro indeterminate. Si ha facilmente che

$$y_s - y_r = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(x_s^3 - x_r^3)}{(\gamma x_s^3 + \delta)(\gamma x_r^3 + \delta)},$$

quindi, essendo $\alpha_0 = \Pi_s(\gamma x_s^3 + \delta)$, si otterranno le seguenti:

$$v_0 = \frac{D^2}{4}(x_\infty^3 - x_0^3)(x_1^3 - x_2^3),$$

$$v_1 = \frac{D^2}{4}(x_\infty^3 - x_1^3)(x_2^3 - x_0^3),$$

$$v_2 = \frac{D^2}{4}(x_\infty^3 - x_2^3)(x_0^3 - x_1^3),$$

nelle quali $D = \alpha\delta - \beta\gamma$.

Si osservi ora che

$$x_\infty^2 + x_0^2 + x_\infty x_0 = \tfrac{1}{4}[3(x_\infty + x_0)^2 + (x_\infty - x_0)^2];$$

si avranno perciò la

$$(x_\infty^2 + x_0^2 + x_\infty x_0)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$$

$$= \frac{1}{a_0^4}[9(a_1^2 - A_0^2)^2 + (A_1^2 - A_2^2)^2 + 3(a_1 + A_0)^2(A_1 - A_2)^2 + 3(a_1 - A_0)^2(A_1 + A_2)^2]$$

$$= \frac{1}{a_0^2}[-24 a_2 z_0 + a_0 a_4 - 16 a_1 a_3 + 24 a_2^2],$$

e le due altre analoghe ad essa; ed in conseguenza saranno:

$$v_0 = \frac{D^2}{a_0^3}(q - p z_0)(z_1 - z_2),$$

$$v_1 = \frac{D^2}{a_0^3}(q - p z_1)(z_2 - z_0),$$

$$v_2 = \frac{D^2}{a_0^3}(q - p z_2)(z_0 - z_1),$$

posto per brevità

$$p = 24 a_2, \qquad q = a_0 a_4 - 16 a_1 a_3 + 24 a_2^2.$$

Fra le radici t_0, t_1, t_2, e le z_0, z_1, z_2 si avranno quindi le relazioni:

$$t_i = \frac{D^2}{a_0^3}\left(p z_i^2 + q z_i - \frac{1}{6} p g_2\right),$$

le quali daranno per gli invarianti γ_2, γ_3 i seguenti valori:

$$\gamma_2 = \frac{D^4}{a_0^6}\left(\frac{1}{12} p^2 g_2^2 - 3 p q g_3 + q^2 g_2\right),$$

$$\gamma_3 = \frac{D^6}{a_0^9}\left[\frac{1}{216} p^3 (g_2^3 - 54 g_3^2) + \frac{1}{4} p^2 q g_2 g_3 - \frac{1}{6} p q^2 g_2^2 + q^3 g_3\right],$$

e pel discriminante:

$$\gamma_2^3 - 27 \gamma_3^2 = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2)(4 q^3 - g_2 q p^2 + g_3 p^3)^2,$$

i quali valori conducono tosto al teorema:

Indicando con f la forma biquadratica (1) *e con h il suo hessiano, gli invarianti γ_2, γ_3 della forma biquadratica* (3), *nel caso che fra le x_i, y_i sussista la relazione* (4), *sono uguali agli invarianti della forma biquadratica*

$$\frac{D^2}{a_0^3}(q f - p h),$$

nella quale le p, q hanno i valori sopra indicati.

CLXIX.

INTORNO AL PROBLEMA DELLE TAUTOCRONE.

Lettera a D. B. BONCOMPAGNI.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche, tomo IX (1876), pp. 211-216.

Illustre Sig. Principe,

Nel Saggio storico sul problema delle Tautocrone del Dr. OHRTMANN *), che la S. V. Ill.^ma^ colla ordinaria sua liberalità faceva pubblicare in Roma lo scorso anno tradotto in lingua francese dal Prof. DUSAUSOY **), leggesi ***):

« Die allgemeinere Formel, aus der sich die LAGRANGE'sche als specieller Fall herleiten lässt, soll « neuerdings von Herrn BRIOSCHI entwickelt worden sein (siehe TORTOLINI, Annali di scienze mate- « matiche e fisiche, t. II und III, 1853: *Sulle curve tautocrone*). Dem Verfasser ist die Arbeit leider nicht « zugänglich gewesen ».

Io ho infatti fino dall'anno 1852 pubblicato negli « Annali di scienze fisiche e matematiche » dell'egregio TORTOLINI una dimostrazione molto semplice della formola di LAGRANGE †), ed alcuni mesi dopo, cioè nel gennaio 1853, giunsi alla formola più generale a cui allude il Dr. OHRTMANN ††). Quel mio breve lavoro fu poi riprodotto

*) *Das Problem der Tautochronen. Ein historischer Versuch von Dr.* CARL OHRTMANN, Berlin.

**) *Le problème des tautochrones. Essai historique par le* Dr. CHARLES OHRTMANN, *traduit de l'allemand par* CLÉMENT DUSAUSOY, Rome, 1875.

***) *Das Problem der Tautochronen*, pag. 14, lin. 29-32; *Le problème des tautochrones*, pag. 31, lin. 17-22.

†) *Sulle linee tautocrone* [VII: t. I, pp. 49-54].

††) *Sulle linee tautocrone* [VIII: t. I, pp. 55-57].

nel primo volume dei *Problèmes de Mécanique rationnelle* del P.e JULLIEN *), e questa indicazione potrebbe forse ritenersi sufficiente allo scopo pel quale io devo chiedere ospitalità nel suo *Bullettino bibliografico*. Considerando però la importanza storica del problema propostosi da LAGRANGE, anche per quanto intorno ad esso scrissero il D'ALEMBERT ed il FONTAINE, mi parve opportuno di dare maggiore diffusione al risultato da me ottenuto da oltre ventitrè anni, pregando la S. V. Ill.ma ad accogliere nel suo *Bullettino* questa mia breve lettera, nella quale riproduco il risultato stesso con alcune lievi modificazioni ed aggiunte.

Il problema propostosi da LAGRANGE nella sua prima memoria del 1765 era il seguente **):

Sia v la velocità del mobile alla fine del tempo t, s la lunghezza dell'arco di trajettoria che alla fine di quel tempo rimane ancora da percorrere al mobile per giungere ad un punto determinato della trajettoria stessa, α il valore di s corrispondente al principio del tempo, p la risultante delle forze tangenziali agenti sul mobile alla fine del tempo t, in fine τ il tempo che impiega il mobile a percorrere l'arco α.

Siccome aumentando v diminuisce s, si avranno dapprima le note relazioni:

$$(1) \qquad v = -\frac{ds}{dt}, \qquad p = -v\frac{dv}{ds},$$

dalla prima delle quali deducesi:

$$(2) \qquad \tau = \int_0^\alpha \frac{ds}{v}.$$

Ora la condizione necessaria e sufficiente pel tautocronismo è che il tempo τ sia indipendente dalla lunghezza dell'arco α, sia cioè

$$(3) \qquad \frac{d\tau}{d\alpha} = 0,$$

e siccome da questa equazione per la (2) può dedursi il valore di v, in funzione di s e di α, corrispondente ad una qualsivoglia linea tautocrona, la seconda delle equazioni (1) darà la espressione della forza tangenziale atta a produrre movimento tautocrono.

*) JULLIEN (le P.), *Problèmes de Mécanique rationelle*, t. I (Paris 1855), pp. 387-393.

**) Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, Année MDCCLXV, Berlin, 1767; pag. 365, lin. 29; pag. 366, lin. 1-2. — LAGRANGE, Œuvres publiées par les soins de M. J. A. SERRET etc., t. II (Paris, 1868), pag. 318, lin. 29-30; pag. 319, lin. 1.

«Mais quelle est en général la force nécessaire pour produire le tautochronisme,
«en la regardant comme une fonction quelconque de l'espace & de la vitesse?».

Il problema di LAGRANGE trasformasi quindi nell'altro di dedurre dalle equazioni (2), (3) il valore più generale della velocità v. A questo scopo si indichi con χ una funzione di s la quale si annulli per $s=0$, e con k il valore della funzione stessa sostituendovi α in luogo di s. Si ponga

$$\chi = kx, \tag{4}$$

e si trasformi l'integrale (2) assumendo la x come nuova variabile. Si avrà evidentemente

$$\tau = \int_0^1 \frac{\varphi'(kx)k\,dx}{v[\varphi(kx), \alpha]},$$

dove con $\varphi(kx)$ indichiamo il valore di s dedotto dalla relazione (4) e con $\varphi'(kx)$ la derivata della funzione φ rispetto a kx. Quest'ultima espressione di τ non contenendo più la α nei limiti dell'integrale, si potrà differenziare per α eseguendo l'operazione sulla quantità sotto il segno di integrazione, e si avrà

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{v^2}\left\{[\varphi''(kx)kx + \varphi'(kx)]\frac{dk}{d\alpha}v - \left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\varphi'(kx)x\frac{dk}{d\alpha} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]\varphi'(kx)k\right\}dx,$$

la quale per la stessa relazione (4), assumendo di nuovo la s come variabile principale, darà:

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{1}{k}\int_0^\alpha F(s, \alpha)\,ds,$$

posto

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{v^2}\left\{[\chi\varphi''(\chi) + \varphi'(\chi)]\frac{dk}{d\alpha}v - \left[\frac{\partial v}{\partial s}\chi\varphi'(\chi)\frac{dk}{d\alpha} + k\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]\varphi'(\chi)\right\}\frac{d\chi}{ds}. \tag{5}$$

Suppongasi ora

$$\int F(s, \alpha)\,ds = \frac{dk}{d\alpha}\rho(s, \alpha), \tag{6}$$

essendo $\rho(s, \alpha)$ una nuova funzione di s e di α; si avrà:

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{1}{k}\frac{dk}{d\alpha}[\rho(\alpha, \alpha) - \rho(0, \alpha)],$$

e quindi la condizione necessaria e sufficiente pel tautocronismo sarà che la funzione $\rho(s, \alpha)$ soddisfi la equazione:

$$\rho(\alpha, \alpha) - \rho(0, \alpha) = 0.$$

Ciò posto, siccome dalla (6) deducesi la

$$F(s, \alpha) = \frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{dk}{d\alpha},$$

si avrà pel valore (5) di $F(s, \alpha)$ la equazione seguente:

$$\left\{[\chi\varphi''(\chi) + \varphi'(\chi)]\frac{dk}{d\alpha}v - \left[\frac{\partial v}{\partial s}\chi\varphi'(\chi)\frac{dk}{d\alpha} + k\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right]\varphi'(\chi)\right\}\frac{d\chi}{ds} = v^2\frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{dk}{d\alpha},$$

la quale servirà appunto a determinare il richiesto valore di v. Questa equazione si può semplificare osservando dapprima che, per la (4), essendo $s = \varphi(\chi)$, si hanno le

$$1 = \varphi'(\chi)\frac{d\chi}{ds}, \qquad 0 = \varphi''(\chi)\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 + \varphi'(\chi)\frac{d^2\chi}{ds^2};$$

poi che supponendo

$$\chi = \frac{d\chi}{ds}\psi(s) \quad \text{e quindi} \quad k = \frac{dk}{d\alpha}\psi(\alpha), \tag{7}$$

risulta

$$\varphi''(\chi)\chi\frac{d\chi}{ds} = \psi'(s) - 1;$$

quindi dividendo per $\frac{dk}{d\alpha}$ ed introducendo nella superiore in luogo della funzione $\chi(s)$ la $\psi(s)$, si ottiene la

$$\frac{\partial v}{\partial s}\psi(s) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\psi(\alpha) = v\left[\psi'(s) - v\frac{\partial\rho}{\partial s}\right]. \tag{8}$$

La integrazione di questa equazione alle derivate parziali del primo ordine deducesi, come è noto, dalla integrazione delle

$$\frac{ds}{\psi(s)} = \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \frac{dv}{v\left[\psi'(s) - v\frac{\partial\rho}{\partial s}\right]}.$$

La prima di queste, ossia la

$$\frac{ds}{\psi(s)} = \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)},$$

dà pei valori (7):

$$\chi = ak, \tag{9}$$

essendo a una costante arbitraria. L'altra

$$\frac{ds}{\psi(s)} = \frac{dv}{v\left[\psi'(s) - v\frac{\partial\rho}{\partial s}\right]}$$

trasformasi facilmente nella

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\psi(s)}{v}\right] = \mu(s, \alpha),$$

essendosi posto $\frac{\partial \rho}{\partial s} = \mu(s, \alpha)$. Supponendo sostituito in quest'ultima equazione il valore di α in funzione di s ricavato dalla (9), valore che indicheremo colla $\alpha = f\left(\frac{\chi}{a}\right)$, si avrà integrando:

$$\frac{\psi(s)}{v} = \lambda(s, \alpha) + b,$$

essendo b una nuova costante arbitraria, e $\lambda(s, \alpha)$ il valore dell'integrale

$$\int \mu\left[s, f\left(\frac{\chi}{a}\right)\right] ds,$$

nel quale pongasi per a, eseguita la integrazione, il suo valore $\frac{\chi}{k}$ dedotto dalla (9). Ponendo in fine

$$b = \Phi(a),$$

si avrà per l'integrale generale dell'equazione (8) la

$$v = \frac{\psi(s)}{\lambda(s, \alpha) + \Phi\left(\frac{\chi}{k}\right)}, \tag{10}$$

cioè la espressione più generale della velocità pel caso di movimento tautocrono.

Come si vede, essa comprende tre funzioni arbitrarie ψ o χ, Φ, λ, l'ultima delle quali soggetta ad una condizione che deducesi dalla

$$\rho(\alpha, \alpha) - \rho(0, \alpha) = 0.$$

Dalla espressione (10) si ottiene tosto quella per la forza tangenziale p corrispondente al tautocronismo. Indicando in fatti con M il denominatore della frazione del secondo membro, si ha dapprima:

$$p = \frac{v^2}{\psi(s)}\left[v\frac{\partial M}{\partial s} - \psi'(s)\right];$$

ma:

$$\frac{\partial M}{\partial s} = \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{1}{k}\Phi'\left(\frac{\chi}{k}\right)\frac{\partial \chi}{\partial s},$$

od anche per la prima delle (7):

$$\frac{\partial M}{\partial s} = \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{1}{\psi(s)} \frac{z}{k} \Phi'\left(\frac{z}{k}\right);$$

quindi, sostituendo pel rapporto $\frac{z}{k}$ il valore che può dedursi dalla stessa (10), si avrà:

$$\frac{\partial M}{\partial s} = \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{1}{\psi(s)} \Psi\left[\frac{\psi(s)}{v} - \lambda(s, \alpha)\right],$$

per la quale il valore della espressione generale della forza tangenziale risulterà essere:

$$(11) \qquad p = \frac{v^2}{\psi(s)} \left\{ \frac{v}{\psi(s)} \Psi\left[\frac{\psi(s)}{v} - \lambda(s, \alpha)\right] + v\frac{\partial \lambda}{\partial s} - \psi'(s) \right\}.$$

Supponendo $\rho(s, \alpha)$ costante rispetto ad s, si ha $\lambda(s, \alpha) = 0$ e perciò:

$$p = \frac{v^2}{\psi(s)}\left[\omega\left(\frac{v}{\psi(s)}\right) - \psi'(s)\right],$$

dove:

$$\omega\left(\frac{v}{\psi(s)}\right) = \frac{v}{\psi(s)} \Psi\left[\frac{\psi(s)}{v}\right],$$

la quale è la espressione di p trovata da LAGRANGE, e riferita dal Sig. Dr. OHRTMANN nel suo saggio storico *).

Le formole (10), (11) risolvono evidentemente anche un problema più generale del tautocronismo, quello cioè in cui il tempo τ in luogo di essere costante rispetto ad α è una funzione determinata dell'arco stesso, mutandosi in questo caso soltanto la condizione alla quale deve soddisfare la funzione $\rho(s, \alpha)$.

Aggradisca, Sig. Principe, le attestazioni della mia molta stima.

Milano, 15 aprile 1876.

*) *Das Problem der Tautochronen*, etc., pag. 10, lin. 29. — *Le problème des tautochrones*, etc., pagina 23, lin. 5.

CLXX.

SOPRA UN TEOREMA DEL SIG. HILBERT.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. X (1896), pp. 153-157.

1. Il prof. HILBERT nel suo lavoro: *Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz* *) ha dimostrato il seguente teorema.

Sieno f, φ due forme binarie, la prima dell'ordine n, la seconda dell'ordine ν; le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma f, di ordine $n = \mu\nu$, sia la potenza μ della φ, sia cioè

$$f = \varphi^{\mu},$$

si ponno esprimere per mezzo di covarianti e di invarianti della forma f nel modo che segue.

Posto

$$f_0 = f(x), \qquad f_1 = \frac{1}{n} f'(x), \qquad f_2 = \frac{1}{n(n-1)} f''(x), \qquad \ldots,$$

si indichino con D, Δ i due simboli di operazione:

$$D = \sum_0^n r f_{r-1} \frac{\partial}{\partial f_r}, \qquad \Delta = \sum_0^n (n-r) f_{r+1} \frac{\partial}{\partial f_r},$$

e sia:

$$C_\nu = f_0^{\nu - \frac{1}{\mu} + 1} \Delta^{\nu+1} f_0^{\frac{1}{\mu}}.$$

*) Mathematische Annalen, t. XXVII (1886), pp. 158-161.

Il prof. HILBERT dimostra:

1° che $D C_\nu = 0$ e quindi C_ν è una funzione di invarianti e di covarianti della funzione f;

2° che le condizioni richieste per ciascun valore di ν sono l'annullarsi identicamente di C_ν, consistono cioè nell'essere identicamente:

$$C_\nu = 0 .$$

Il prof. HILBERT aggiunge nella sua Memoria i valori di C_1, C_2, C_3, C_4; noi qui li ripetiamo completandoli coi rispettivi coefficienti numerici, da lui non considerati perchè indifferenti allo scopo del suo teorema.

In questi valori entrano i seguenti covarianti (invarianti) della forma f:

$$H = \frac{1}{2}(ff)_2, \qquad K = \frac{1}{2}(ff)_4, \qquad P = \frac{1}{2}(ff)_6,$$

$$T = 2(fH), \qquad U = 2(fK),$$

e si hanno:

$$C_1 = (n-1)H,$$

$$C_2 = 2(n-1)(n-2)T,$$

$$C_3 = 3(n-1)(n-2)(n-3)\left[Kf^2 - 3\frac{2n-3}{n-2}H^2\right],$$

$$C_4 = 4(n-1)\ldots(n-4)\left[Uf^2 - 4\frac{3n-4}{n-3}HT\right],$$

$$C_5 = 5(n-1)\ldots(n-5)\left[Pf^4 - 3.5\frac{2n-5}{n-4}HKf^2\right.$$

$$\left. - 4.5\frac{2n-5}{(n-3)(n-4)}T^2 + 3.5\frac{(2n-5)(4n^2-17n+19)}{(n-2)(n-3)(n-4)}H^3\right].$$

2. Pongasi:

$$\varphi_0 = \varphi(x), \qquad \varphi_1 = \frac{1}{\nu}\varphi'(x), \qquad \varphi_2 = \frac{1}{\nu(\nu-1)}\varphi''(x), \qquad \ldots$$

e si indichino con d, δ i due simboli di operazione:

$$d = \sum_0^\nu r\varphi_{r-1}\frac{\partial}{\partial\varphi_r}, \qquad \delta = \sum_0^\nu (\nu - r)\varphi_{r+1}\frac{\partial}{\partial\varphi_r};$$

dimostrasi facilmente essere

$$d = D, \qquad \delta = \Delta,$$

e quindi:

$$d\,C_\nu = 0,$$

ossia C_ν è una funzione di covarianti e di invarianti della forma φ.

Per la seconda relazione, supponendo $\lambda \leqq \nu$ e ponendo

$$C_\lambda = f_0^{\lambda - \frac{1}{\mu} + 1} \Delta^{\lambda+1} f_0^{\frac{1}{\mu}},$$

si avrà:

$$C_\lambda = \varphi_0^{(\lambda+1)\mu - 1}\, \delta^{\lambda+1} \varphi_0,$$

da cui:

$$C_\lambda = \nu(\nu - 1) \ldots (\nu - \lambda)\, \varphi_0^{(\lambda+1)\mu-1} \varphi_{\lambda+1},$$

che dà $C_\nu = 0$.

Considerando ora la formola già data dal sig. HILBERT

$$D \Delta^{\lambda+1} f_0^{\frac{1}{\mu}} = (\lambda + 1)(\nu - \lambda) \Delta^\lambda f_0^{\frac{1}{\mu}},$$

si deduce che:

$$D\,C_\lambda = (\lambda + 1)(\nu - \lambda) f_0\, C_{\lambda-1},$$

ed analogamente per $d\,C_\lambda$. D'altra parte per la definizione stessa di C_λ si ottiene la

$$\Delta\, C_\lambda = \frac{1}{f_0}\{C_{\lambda+1} + [n(\lambda + 1) - \nu] f_1\, C_\lambda\},$$

e da queste:

$$\Delta D\, C_\lambda - D \Delta\, C_\lambda = (2 - n)(\lambda + 1)\, C_\lambda,$$

la quale, come è noto, conduce alle due:

$$\sum_0^n f_r \frac{\partial C_\lambda}{\partial f_r} = (\lambda + 1)\, C_\lambda, \qquad \sum_1^n r f_r \frac{\partial C_\lambda}{\partial f_r} = (\lambda + 1)\, C_\lambda,$$

ed anche alle

$$\sum_0^\nu \varphi_r \frac{\partial C_\lambda}{\partial \varphi_r} = \mu(\lambda + 1)\, C_\lambda, \qquad \sum_1^\nu r \varphi_r \frac{\partial C_\lambda}{\partial \varphi_r} = (\lambda + 1)\, C_\lambda.$$

Se ora supponesi in queste $\lambda = \nu$, si hanno i due risultati:

1° il covariante C_ν della forma f è del grado $\nu + 1$ e dell'ordine $(n - 2)(\nu + 1)$, come ha già dimostrato il sig. HILBERT;

2° il covariante C_ν della forma φ è del grado $\mu(\nu + 1)$ e dell'ordine $(n - 2)(\nu + 1)$.

Queste varie condizioni sono soddisfatte dalle formole seguenti. Pongasi:

$$h = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \qquad k = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_4, \qquad p = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_6, \qquad \ldots$$

$$t = 2(\varphi h), \qquad u = 2(\varphi k).$$

Le quantità indicate sopra con C_1, C_2, C_3, ... si esprimono in funzione di questi covarianti, come segue:

$$C_1 = (\nu - 1)\varphi_0^{2(\mu-1)} h,$$

$$C_2 = 2(\nu - 1)(\nu - 2)\varphi_0^{3(\mu-1)} t,$$

$$C_3 = 3(\nu - 1)(\nu - 2)(\nu - 3)\varphi_0^{4(\mu-1)}\left[k\varphi^2 - 3\frac{2\nu - 3}{\nu - 2}h^2\right],$$

ed analogamente per le altre. Questi valori dànno per $\nu = 1$, $C_1 = 0$; per $\nu = 2$, $C_2 = 0$; etc., cioè il teorema del sig. HILBERT; ma nello stesso tempo determinano i valori di C_1, C_2, ... $C_{\nu-1}$ per $C_\nu = 0$.

È notabile il risultato che dalla relazione

$$f = \varphi^\mu$$

consegua una serie di funzioni invariantive e di relazioni della stessa natura, quali le

$$(n - 1)H = (\nu - 1)\varphi^{2(\mu-1)} h,$$

$$(n - 1)(n - 2)T = (\nu - 1)(\nu - 2)\varphi^{3(\mu-1)} t,$$

e così via.

Milano, 22 febbrajo 1896.

CLXXI.

SOPRA UNA FORMA BINARIA DELL'OTTAVO ORDINE.

Collectanea Mathematica, in memoriam Dominici Chelini, (Mediolani, 1881), pp. 213-220.

È noto che, essendo $f(z_1, z_2)$ una forma binaria dell'ordine n pari, il covariante g dell'ordine $2(n-4)$ che si ottiene dalla operazione

$$g = \frac{1}{2}(ff)_4$$

può essere identicamente eguale a zero, nei soli tre casi di $n = 4, 6, 12$. Se la forma f è dell'ottavo ordine, il covariante g è pure dello stesso ordine. Di qui la domanda alla quale rispondesi in questo scritto: *quali sono le proprietà della forma f dell'ottavo ordine che soddisfa identicamente alla relazione*

$$g = \rho f \tag{1}$$

supposto ρ costante?

In un mio lavoro: *La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre,* pubblicato alcuni anni ora sono nei « Mathematische Annalen » *), ho dimostrato che, indicando con z_1, z_2 due integrali particolari dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = P z,$$

nella quale

$$P = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{4}p^2 - q,$$

*) [t. XI (1877), pp. 401-411].

e p, q sono funzioni razionali di x; se si pone

$$(2)\qquad \begin{cases} f(z_1, z_2) = \varphi(x), \\ h(z_1, z_2) = -\varphi^{2\frac{n-2}{n}} y, \end{cases}$$

essendo h l'hessiano della forma f, si ha in generale:

$$(3)\qquad g = -\frac{\varphi^{2\frac{n-4}{n}}}{(n-2)(n-3)}[y'' - 6(n-2)^2 y^2],$$

dove

$$y'' = \frac{d^2 y}{d\omega^2}, \qquad d\omega = C\frac{dx}{\varphi^{\frac{2}{n}}} \qquad (C \text{ costante}).$$

Se $n = 8$ e per la (1) $g = \rho\varphi$, la equazione differenziale (3) diventa la

$$y'' - 6^3 y^2 + 30\rho = 0,$$

che integrata dà:

$$(4)\qquad y'^2 - 144 y^3 + 60\rho y = D \qquad (D \text{ costante}).$$

Si indichi con $k(z_1, z_2)$ il covariante della forma f, che si ottiene dalla

$$k = 2(fh);$$

come si è dimostrato nella Memoria sopra citata, si ha in generale:

$$k = \frac{1}{n-2}\varphi^{3\frac{n-2}{n}} y';$$

quindi nel caso qui considerato:

$$k = \tfrac{1}{6}\varphi^{\frac{9}{4}} y',$$

per la quale e per le (2) si può dare alla (4) la forma seguente:

$$k^2 + 4h^3 - \tfrac{5}{3}\rho h f^3 = \tfrac{1}{36} D f^{\frac{9}{2}}.$$

Questa equazione, dovendo essere soddisfatta identicamente, dimostra tosto essere $D = 0$, e si avranno così le

$$(5)\qquad \begin{cases} y'^2 = 12y(12y^2 - 5\rho), \\ k^2 + 4h^3 - \tfrac{5}{3}\rho h f^3 = 0. \end{cases}$$

Il valore di ρ si ottiene dalla (1) nel modo che segue. Pongasi

$$\frac{1}{2}(ff)_8 = A, \qquad \frac{1}{3}(fg)_8 = B;$$

saranno A, B due invarianti di f, l'uno del secondo, l'altro del terzo grado; ora siccome dalla (1) si deduce la

$$(fg)_8 = \rho (ff)_8,$$

sarà:

$$\rho = \frac{3}{2}\frac{B}{A}. \tag{6}$$

Pongo ora nella prima delle (5)

$$12 y^2 = 5\rho\xi; \tag{7}$$

la equazione stessa si trasforma facilmente nella

$$\xi' = 4\sqrt{6}\sqrt[4]{15\rho}\,.\,\xi^{\frac{3}{4}}\sqrt{\xi - 1},$$

la quale, essendo, come si è veduto sopra,

$$d\omega = C\frac{dx}{\varphi^{\frac{1}{4}}},$$

conduce alla

$$\frac{dx}{d\xi} = M\frac{\varphi^{\frac{1}{4}}}{\xi^{\frac{3}{4}}\sqrt{\xi - 1}}, \tag{8}$$

posto

$$M = \frac{1}{4\sqrt{6}\sqrt[4]{15\rho}\,.\,C}.$$

Dalla equazione superiore si ha tosto:

$$\frac{d\log\frac{dx}{d\xi}}{d\xi} = \frac{1}{4}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\frac{dx}{d\xi} - \frac{3}{4}\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi},$$

la quale derivata nuovamente rispetto a ξ dà:

$$\frac{d^2\log\frac{dx}{d\xi}}{d\xi^2} = \frac{1}{16\varphi^2}(4\varphi\varphi'' - 3\varphi'^2)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{dx}{d\xi}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\right)$$
$$+\frac{3}{4}\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\xi)^2}.$$

Si otterrà quindi pel valore della espressione

$$[x]_\xi = \frac{d^2 \log \frac{dx}{d\xi}}{d\xi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \frac{dx}{d\xi}}{d\xi}\right)^2$$

la

$$[x]_\xi = \frac{1}{32\varphi^2}(8\varphi\varphi'' - 7\varphi'^2)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \frac{15}{32}\frac{1}{\xi^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{\xi(1-\xi)}.$$

Ma dalla stessa Memoria sopra indicata si ha che il valore dell'hessiano h, espresso in funzione di φ, p, q e delle loro derivate rispetto ad x, è il seguente:

$$h = \frac{1}{7 \cdot 8^2 C^2}(8\varphi\varphi'' - 7\varphi'^2 - 64 P\varphi^2);$$

si avrà dunque:

$$[x]_\xi = 2P\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + 14 C^2 \frac{h}{\varphi^2}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \frac{15}{32}\frac{1}{\xi^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{\xi(1-\xi)}.$$

Rammentando ora che, per la seconda delle (2), si ha:

$$\frac{h}{\varphi\sqrt{\varphi}} = -y,$$

ossia per la (7):

$$(9) \qquad \frac{h}{\varphi\sqrt{\varphi}} = -\frac{\sqrt{15\rho}}{6}\sqrt{\xi},$$

si otterrà per la (8) che:

$$C^2 \frac{h}{\varphi^2}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{1}{4^2 \cdot 6^2}\frac{1}{\xi(1-\xi)},$$

e sostituendo si avrà:

$$[x]_\xi = 2P\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \frac{15}{32}\frac{1}{\xi^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{115}{288}\frac{1}{\xi(1-\xi)}.$$

Infine, se poniamo

$$z = \frac{a z_1 + b z_2}{c z_1 + d z_2} \qquad (a, b, c, d \text{ costanti}),$$

si ha la formola di trasformazione

$$[z]_\xi = [x]_\xi + [z]_x \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2;$$

inoltre, come è noto, la

$$[z]_x = -2P;$$

sarà quindi:

$$[z]_\xi = \frac{15}{32}\frac{1}{\xi^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{115}{288}\frac{1}{\xi(1-\xi)},$$

ossia:

$$(10) \qquad [z]_\xi = \frac{1-\lambda^2}{2\xi^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-\xi)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2\xi(1-\xi)},$$

nella quale le λ, μ, ν hanno i valori:

$$\lambda = \tfrac{1}{4}, \qquad \mu = \tfrac{1}{3}, \qquad \nu = \tfrac{1}{2}.$$

Questi valori di λ, μ, ν dimostrano che la forma binaria dell'ottavo ordine $f(z_1, z_2)$ qui considerata non costituisce un tipo speciale, ma che essa appartiene al tipo dell'ottaedro. Infatti, indicando con $F(z_1, z_2)$ una forma binaria del sesto ordine per la quale il covariante

$$G = \tfrac{1}{2}(FF)_4$$

sia identicamente eguale a zero, e con $H(z_1, z_2)$, $K(z_1, z_2)$ i covarianti di essa formati come gli h, k lo sono colla f, si ha la relazione:

$$(11) \qquad K^2 + 4H^3 + \tfrac{1}{18}\alpha F^4 = 0,$$

essendo α l'invariante quadratico di F. Se z rappresenta anche in questo caso il rapporto fra gli integrali particolari z_1, z_2 e si pone:

$$\eta = -\frac{72H^3}{\alpha F^4},$$

si ha inoltre:

$$[z]_\eta = \frac{1-l^2}{2\eta^2} + \frac{1-n^2}{2(1-\eta)^2} - \frac{l^2-m^2+n^2-1}{2\eta(1-\eta)},$$

nella quale $l = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{2}$.

Ora, se in quest'ultima equazione si pone $\eta = \frac{1}{\xi}$, la equazione stessa si trasforma nella (10); perciò, rammentando il valore (9) di ξ, si avrà che

$$\frac{12}{5\rho}\frac{h^2}{f^3} = -\frac{\alpha F^4}{72H^3};$$

saranno cioè:

$$f = aH, \qquad h = bF^2,$$

essendo a, b due costanti che devono soddisfare all'equazione:

$$\frac{b^2}{a^3} = -\frac{5}{4.6^3}\rho\,\alpha.$$

Le due equazioni superiori dànno tosto:

$$k = -abFK,$$

e sostituendo questi valori di f, h, k nella seconda delle (5) si avrà:

$$K^2 - \frac{5}{3}\rho\frac{a}{b}H^3 + 4\frac{b}{a^2}F^4 = 0,$$

la quale posta a confronto colla (11) dà per a e per b i valori:

$$a = -30\frac{\rho}{\alpha}, \qquad b = \frac{25}{2}\frac{\rho^2}{\alpha},$$

che appunto soddisfano la superiore.

Si ha così il teorema seguente: *La forma binaria dell'ottavo ordine f, per la quale il covariante (pure dell'ottavo ordine) $g = \frac{1}{2}(ff)_4$ soddisfa identicamente alla relazione $g = \rho f$ (essendo ρ costante), non differisce che di un fattore costante dall'hessiano di una forma del sesto ordine, di cui il corrispondente covariante G sia identicamente nullo.*

Si può giungere a questo risultato anche per altra via, la quale ci fornirà altresì il tipo *normale* di queste forme f. Sieno:

$$f(z_1, z_2) = a_0 z_1^8 + 8a_1 z_1^7 z_2 + \cdots + a_8 z_2^8,$$
$$g(z_1, z_2) = c_0 z_1^8 + 8c_1 z_1^7 z_2 + \cdots + c_8 z_2^8.$$

Nella seconda delle quali:

$$c_0 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$
$$c_1 = \frac{1}{2}(a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3),$$
$$c_2 = \frac{1}{14}(3a_0 a_6 - 4a_1 a_5 - 11a_2 a_4 + 12a_3^2),$$
$$c_3 = \frac{1}{14}(a_0 a_7 + 2a_1 a_6 - 12a_2 a_5 + 9a_3 a_4),$$
$$c_4 = \frac{1}{70}(a_0 a_8 + 12a_1 a_7 - 22a_2 a_6 - 36a_3 a_5 + 45a_4^2),$$
$$c_5 = \frac{1}{14}(a_1 a_8 + 2a_2 a_7 - 12a_3 a_6 + 9a_4 a_5),$$
$$c_6 = \frac{1}{14}(3a_2 a_8 - 4a_3 a_7 - 11a_4 a_6 + 12a_5^2),$$
$$c_7 = \frac{1}{2}(a_3 a_8 - 3a_4 a_7 + 2a_5 a_6),$$
$$c_8 = a_4 a_8 - 4a_5 a_7 + 3a_6^2.$$

Se $g = \rho f$, dovrà essere

$$c_r = \rho a_r,$$

la quale condizione è soddisfatta supponendo $a_0, a_2, a_3, a_5, a_6, a_8$ eguali a zero, essendo pei valori superiori pure eguali a zero $c_0, c_2, c_3, c_5, c_6, c_8$. Si hanno inoltre le

$$c_1 = -\tfrac{3}{2} a_1 a_4, \qquad c_4 = \tfrac{3}{70}(4 a_1 a_7 + 15 a_4^2), \qquad c_7 = -\tfrac{3}{2} a_4 a_7.$$

Gli invarianti A, B definiti più sopra avranno in questa ipotesi i seguenti valori:

$$A = -8 a_1 a_7 + 35 a_4^2, \qquad B = 3 a_4 (4 a_1 a_7 + 5 a_4^2);$$

e quindi sarà:

$$\rho = \frac{3}{2} \frac{B}{A} = \frac{9}{2} \frac{a_4 (4 a_1 a_7 + 5 a_4^2)}{-8 a_1 a_7 + 35 a_4^2}.$$

Le tre relazioni $c_1 = \rho a_1$, $c_4 = \rho a_4$, $c_7 = \rho a_7$ si riducono alle due

$$\rho = -\tfrac{3}{2} a_4, \qquad 2 a_1 a_7 + 25 a_4^2 = 0,$$

e questo valore di ρ posto nella superiore conduce nuovamente a quest'ultima equazione. Si ha così una sola relazione alla quale devono soddisfare i coefficienti a_1, a_4, a_7 della forma binaria dell'ottavo ordine

$$f(z_1, z_2) = 8 a_1 z_1^7 z_2 + 70 a_4 z_1^4 z_2^4 + 8 a_7 z_1 z_2^7,$$

perchè sia $g = \rho f$. Se infine supponiamo $a_7 = -1$, $8 a_1 = 1$, si ha dalla relazione stessa $10 a_4 = 1$; cioè la forma

$$f(z_1, z_2) = z_1^7 z_2 + 7 z_1^4 z_2^4 - 8 z_1 z_2^7$$

avrà la proprietà indicata.

Questa espressione per la forma f si è già presentata al professore GORDAN nella sua interessante Memoria: *Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten* *). Egli osserva che, sostituendo nella medesima alle z_1, z_2 le

$$z_1 = \frac{a_1}{b_1} y_1 + \frac{a_2}{b_2} y_2, \qquad z_2 = \frac{1}{b_1} y_1 + \frac{1}{b_2} y_2,$$

nelle quali sono

$$a_1 = 1 + \sqrt{3}, \qquad a_2 = 1 - \sqrt{3},$$

$$b_1 = (7 + 4\sqrt{3})^{\frac{1}{8}}, \qquad b_2 = (7 - 4\sqrt{3})^{\frac{1}{8}},$$

*) [Mathematische Annalen, t. XII (1877), pp. 147-166].

la forma f si trasforma nella

$$f = 108\,(y_1^8 - 14 y_1^4 y_2^4 + y_2^8),$$

ossia

$$f = -\,108\,H,$$

essendo H l'hessiano della forma del sesto ordine

$$F = 6 y_1 y_2 (y_1^4 + y_2^4),$$

per la quale il covariante $G = 0$. Infine il professore GORDAN osserva altresì essere l'hessiano di f o di H un quadrato; noi abbiamo infatti trovato più sopra che l'hessiano stesso non differisce che di un coefficiente costante dal quadrato della forma F.

Novembre 1880.

CLXXII.

IL RISULTANTE DI DUE FORME BINARIE L'UNA CUBICA E L'ALTRA BIQUADRATICA.

Collectanea Mathematica, in memoriam Dominici Chelini, (Mediolani, 1881), pp. 221-223.

Il sistema simultaneo di due forme binarie l'una cubica, l'altra di quarto ordine, fu, alcuni anni ora sono, argomento di una interessante dissertazione inaugurale del professore GUNDELFINGER *). Il sistema, comprendendo in esso la cubica e la biquadratica, si compone di 64 forme e precisamente si hanno:

1	Covariante	di	sesto	ordine
2	»	»	quinto	»
5	»	»	quarto	»
8	»	»	terzo	»
12	»	»	secondo	»
16	»	»	primo	»
20	Invarianti			
N. 64.				

In questo breve scritto aggiungiamo ai risultati del signor GUNDELFINGER il valore del *risultante* di quelle due forme binarie espresso in funzione di alcuni fra gli indicati invarianti. Sieno $u(x_1, x_2)$ la forma del quarto ordine, $v(x_1, x_2)$ quella del terzo. Posto

$$u_1 = \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad u_{11} = \frac{1}{3.4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \qquad \ldots \qquad v_1 = \frac{1}{3}\frac{\partial v}{\partial x_1}, \qquad \ldots$$

*) *Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form*, Stuttgart, 1869.

ed indicando con (uv), $(uv)_2$, $(uv)_3$, ... le espressioni

$$(uv) = u_1 v_2 - u_2 v_1, \qquad (uv)_2 = u_{11} v_{22} - 2 u_{12} v_{12} + u_{22} v_{11},$$

$$(uv)_3 = u_{111} v_{222} - 3 u_{112} v_{221} + 3 u_{122} v_{211} - u_{222} v_{111},$$

la forma u ammette, come è noto, il sistema di forme simultanee:

$$u, \qquad h = \frac{1}{2}(uu)_2, \qquad k = 2(uh), \qquad i = \frac{1}{2}(uu)_4, \qquad j = \frac{1}{3}(uh)_4,$$

legate fra loro dalla relazione

$$k^2 + 4h^3 - iu^2 h + ju^3 = 0;$$

e la v il sistema:

$$v, \qquad w = (vv)_2, \qquad Q = (vw), \qquad A = \frac{1}{2}(ww)_2,$$

fra le quali sussiste la

$$Q^2 + \frac{1}{2}w^3 + Av^2 = 0.$$

Si indichino con p, t, ω i tre seguenti covarianti, simultanei alle due forme u, v, degli ordini primo, secondo e terzo:

$$p = (uv)_3, \qquad t = \frac{1}{2}(uw)_2, \qquad \omega = (kv)_3,$$

e formiamo coi medesimi gl'invarianti:

$$B = \frac{1}{2}(tw)_2, \qquad M = (vp^3)_3, \qquad F = (tp^2)_2, \qquad P = (Q\omega)_3,$$

gli ultimi tre dei quali sono del 7° grado nei coefficienti di u e di v, e cioè del terzo grado rispetto ai coefficienti di u e del quarto rispetto a quelli di v.

Il *risultante* Δ, il quale è pure del 7° grado, si esprime in funzione dei tre invarianti M, F, P e degli invarianti A, B, i, j nel modo seguente:

$$\Delta = 27(5jA + iB) - (M + 45F + 54P).$$

Per verificare l'esattezza di questo risultato supponiamo:

$$u = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$

$$v = x_1^3 - x_2^3;$$

saranno, come è noto:

$$i = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$j = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3;$$

inoltre:

$$w = -2x_1 x_2, \qquad Q = -(x_1^3 + x_2^3), \qquad A = -1;$$

e quindi:

$$p = -(u_{111} + u_{222}), \qquad t = u_{12}, \qquad \omega = -(k_{111} + k_{222});$$

per le quali:

$$B = t_{12} = a_2,$$

$$M = -(a_0 + a_3)^3 - (a_1 + a_4)^3,$$

$$F = a_1(a_1 + a_4)^2 - 2a_2(a_1 + a_4)(a_0 + a_3) + a_3(a_0 + a_3)^2.$$

$$P = 3a_2a_3a_4 + 3a_0a_1a_2 - a_1a_4^2 - a_0^2a_3 - 2a_1^3 - 2a_3^3.$$

Sostituendo questi valori nella espressione Δ si ottiene la

$$\Delta = (a_0 + 4a_3)^3 + (a_4 + 4a_1)^3 + 6^3a_2^3 - 3.6a_2(a_0 + 4a_3)(a_4 + 4a_1),$$

come appunto deve essere.

CLXXIII.

PREFAZIONE ED APPENDICI AL "TRATTATO ELEMENTARE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE DI ARTURO CAYLEY *)".

Traduzione riveduta e accresciuta d'alcune appendici da F. Brioschi (Milano, 1880), pp. V-VI, 365-446.

PREFAZIONE.

Nel presentare ai giovani matematici italiani la traduzione di questo trattato sulle funzioni ellittiche dell'eminente geometra inglese signor Cayley, sento mio debito di accennare loro brevemente quali ragioni mi consigliarono a questa pubblicazione e quali scopi io nutra fiducia di raggiungere con essa.

Il presente trattato, come già l'illustre Autore dichiara nella sua prefazione, trae la propria origine dalla classica opera: *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, di Jacobi **), ma la completa nel senso, che alcune importantissime parti di quella teoria, le quali dovevano trovar posto in un secondo volume, non mai pubblicato, dell'opera stessa, vi furono introdotte e collocate rispetto alle altre in opportuna situazione. Così, mentre da un lato varie fra le belle scoperte consegnate dal celebre geometra tedesco ai volumi terzo e quarto del Giornale di matematiche di Crelle sono usufruite dall'autore nella maniera sopra indicata, il carattere del libro concesse a Lui, dall'altro lato, di premettere alcuni capitoli, nei quali la parte più elementare della teoria prepara il lettore a penetrare nelle più difficili ricerche che costituiscono il soggetto dei *Fundamenta nova*.

Ciò posto, credo dovere anzitutto rispondere ad una obbiezione che potrebbe essere mossa da taluno relativamente al metodo seguito nel trattato.

---

*) A. Cayley, *An Elementary Treatise on elliptic Functions* (Cambridge, 1876).

**) [Regiomonti, 1829. — *Gesammelte Werke*, t. I (Berlin, 1881), pp. 49-239].

Come mai, si chiederà forse, dopo che le più recenti ed accurate indagini intorno la natura e le proprietà delle funzioni considerate dal punto di vista più generale, hanno così potentemente contribuito a stabilire sopra nuove basi la teorica delle funzioni ellittiche, come mai, dopo che sono venute in luce varie e pregevoli pubblicazioni sopra questo argomento, nelle quali si tiene il massimo conto delle nuove dottrine, si potè ritenere ancora opportuno il ritornare sulle orme di LEGENDRE e di JACOBI?

L'obbiezione non è invero priva di valore, e probabilmente rimarrebbe senza risposta, se questa non ci fosse offerta dall'esame delle stesse pubblicazioni sopra indicate. Nessuno potrà disconoscere infatti che troppo sovente in quelle pubblicazioni, dedicate alle funzioni ellittiche, lo sviluppo dato alle nuove dottrine fu tutto a danno del soggetto principale, sicchè le più importanti proprietà delle funzioni medesime furono lasciate quasi nell'ombra, se pur anco non dimenticate. Dal quale difetto di proporzioni doveva necessariamente nascere il desiderio e forse il bisogno di ritornare alle opere di quei primi maestri, i quali avevano d'altronde saputo accoppiare, ad una grande semplicità di esposizione, le qualità attraenti di chi rivela le proprie scoperte.

Riconosciuto per conto mio e per mia esperienza questo bisogno, io vagheggiava già da tempo di poter comporre un trattato sulle funzioni ellittiche nell'accennato indirizzo, allorchè comparve il libro del signor CAYLEY. Avuto da Lui gentilmente il permesso di una traduzione italiana, ne affidai in molta parte la esecuzione ad uno dei miei distinti allievi, l'ingegnere JORINI, facendomi poi coadiuvare nella revisione di essa dal dottore PAOLO CAZZANIGA, della Scuola di Magistero di Pavia.

Le tre appendici che io aggiunsi sono relative a proprietà meno note delle funzioni ellittiche, in parte già enunciate da JACOBI nei primi volumi del Giornale di CRELLE. Nell'ultima di esse poi, partendo appunto da una di queste proprietà, ho nuovamente esposti i risultati ottenuti dai signori HERMITE e KRONECKER e da me intorno la risoluzione delle equazioni del quinto grado.

Milano, novembre 1879.

APPENDICE PRIMA.

Formole per la moltiplicazione delle funzioni ellittiche.

1. JACOBI, in una delle Memorie pubblicate nel Giornale di CRELLE *), colle quali preludeva alla classica sua opera *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, an-

*) JACOBI, *Suite des notices sur les fonctions elliptiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. IV (1829), pp. 185-193].

nuncia che le formole per la moltiplicazione delle funzioni ellittiche si possono formare colle derivate di due particolari funzioni irrazionali, delle quali assegna la espressione; ed aggiunge, ad esempio, le formole relative dalla duplicazione alla quintuplicazione.

Posto $x = \operatorname{sn} u$, le due funzioni irrazionali considerate da JACOBI sono le seguenti:

$$A(x) = x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \qquad B(x) = \frac{1}{x^2}A(x).$$

Indicando con $A^{(r)}$, $B^{(r)}$ le loro derivate r^{me} rispetto ad x^2 e con H_{r-1}, K_{r-1} le espressioni

$$H_{r-1} = \frac{1}{\Pi(r)}A^{(r)}, \qquad K_{r-1} = \frac{1}{\Pi(r)}B^{(r)}, \qquad \Pi(r) = 1.2.3\ \dots\ r,$$

si hanno facilmente le relazioni che seguono:

$$2A\,H_0 = 1 - 2(1+k^2)x^2 + 3k^2x^4,$$

$$8A^3H_1 = -1 + 6k^2x^4 - 4k^2(1+k^2)x^6 + 3k^4x^8,$$

$$16A^5H_2 = 1 - 2(1+k^2)x^2 + 5k^2x^4 - 5k^4x^8 + 2k^4(1+k^2)x^{10} - k^6x^{12},$$

$$2B\,K_0 = -\frac{1}{x^4}(1-k^2x^4),$$

$$8B^3K_1 = \quad \frac{1}{x^8}[3 - 4(1+k^2)x^2 + 6k^2x^4 - k^4x^8],$$

$$16B^5K_2 = -\frac{1}{x^{12}}[5 - 12(1+k^2)x^2 + (8+29k^2+8k^4)x^4$$
$$- 20k^2(1+k^2)x^6 + 15k^4x^8 - k^6x^{12}],$$

per le quali le formole di moltiplicazione, esposte alle pag. 72, 73 del testo *), prendono la forma

$$\operatorname{sn} 2u = -\frac{1}{x^2K_0}, \qquad \operatorname{sn} 3u = x^3\frac{K_1}{H_1},$$

$$\operatorname{sn} 4u = \frac{H_2}{x^4(K_0K_2 - K_1^2)}, \qquad \operatorname{sn} 5u = -x^5\frac{K_1K_3 - K_2^2}{H_1H_3 - H_2^2},$$

coincidono, cioè, colle espressioni date da JACOBI.

---

*) A. CAYLEY, *Trattato elementare delle funzioni ellittiche* (Traduzione di F. BRIOSCHI).

2. La ricerca delle formole generali, per una moltiplicazione d'ordine qualsivoglia, e quindi la dimostrazione del teorema enunciato da JACOBI, si possono far dipendere da un noto teorema di ABEL relativo ad una proprietà della somma di un numero qualunque di funzioni ellittiche. Infatti, posto

$$f(z) = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \cdots + a_n z^{2n} + z^{2(n+1)},$$

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z^2 + b_2 z^4 + \cdots + b_{n-1} z^{2(n-1)},$$

se si indicano con $z_1^2, z_2^2, \dots z_{2n+1}^2, y^2$ le radici della equazione

$$F(z) = f^2(z) - \varphi^2(z) A^2(z) = 0, \tag{1}$$

per cui

$$F(z) = (z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2) \cdots (z^2 - z_{2n+1}^2)(z^2 - y^2), \tag{2}$$

dalle $2n + 1$ equazioni identiche

$$f(z) = \varphi(z) A(z), \qquad (z = z_1, z_2, \dots z_{2n+1}) \tag{3}$$

si otterranno i valori dei $2n + 1$ coefficienti

$$a_0, \ a_1, \dots a_n, \qquad b_0, \ b_1, \dots b_{n-1},$$

e, ponendo $z = 0$ nella (2), si avrà la

$$y = \frac{a_0}{z_1 z_2 \cdots z_{2n+1}}. \tag{4}$$

Ora, se si rappresenta con z^2 una qualsivoglia delle radici superiori, la derivata totale della equazione identica $F(z) = 0$ rispetto a z dà

$$F'(z) dz + dF(z) = 0,$$

e siccome dalla (1) si deduce

$$dF(z) = 2[f(z) df(z) - \varphi(z) A^2(z) d\varphi(z)],$$

ossia per la (3)

$$dF(z) = 2A(z)[\varphi(z) df(z) - f(z) d\varphi(z)],$$

si avrà:

$$\frac{dz}{\Delta(z)} + 2\frac{z[\varphi(z) df(z) - f(z) d\varphi(z)]}{F'(z)} = 0,$$

essendo

$$\Delta(z) = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}.$$

Quest'ultima equazione sussistendo per $z = z_1, z_2 \dots$, sostituendo in essa $z_1, z_2 \dots$

in luogo di z e sommando, si avrà, per un noto teorema algebrico, che

$$\frac{dz_1}{\Delta(z_1)} + \frac{dz_2}{\Delta(z_2)} + \cdots + \frac{dz_{2n+1}}{\Delta(z_{2n+1})} = \frac{dy}{\Delta(y)}, \tag{5}$$

supposto che per l'ultima radice y sia

$$f(y) + \varphi(y) A(y) = 0.$$

Sieno $z_1 = z_2 = \cdots = z_{2n+1} = x$; come è noto, sussisteranno insieme alla

$$f(x) = \varphi(x) A(x)$$

le sue derivate fino alla $(2n)^{ma}$, e da esse si potranno dedurre i valori dei coefficienti di f e di φ. Inoltre dalla (4) si ottiene la

$$y = \frac{a_0}{x^{2n+1}},$$

mentre la relazione (5) conduce alla seguente

$$(2n+1)\frac{dx}{\Delta(x)} = \frac{dy}{\Delta(y)}.$$

La equazione generale per la moltiplicazione d'ordine dispari sarà quindi la

$$\mathrm{sn}\,(2n+1)u = \frac{a_0}{x^{2n+1}}.$$

Per determinare il valore di a_0 si osservi che, rappresentando con $f^{(r)}$, $\varphi^{(r)}$ le derivate r^{me} dei polinomi $f(x)$, $\varphi(x)$ rispetto ad x^2, siccome

$$f^{(n+1)} = \Pi(n+1), \qquad f^{(n+2)} = f^{(n+3)} = \cdots = 0, \qquad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n+1)} = \cdots = 0,$$

dalla equazione identica

$$\varphi(x) A(x) = f(x)$$

si deducono le

$$\left\{\begin{array}{l} H_1 h_n + H_2 h_{n-1} + \cdots + H_n h_1 = 1, \\ H_2 h_n + H_3 h_{n-1} + \cdots + H_{n+1} h_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_n h_n + H_{n+1} h_{n-1} + \cdots + H_{2n-1} h_1 = 0, \end{array}\right. \tag{6}$$

essendo

$$\frac{1}{\Pi(r)}\varphi^{(r)} = h_{r+1}.$$

D'altra parte, se dividiamo l'equazione superiore per x^2, si ottiene la

$$\varphi(x)B(x) = \frac{1}{x^2}f(x),$$

e siccome la derivata $(n+1)^{ma}$ del secondo membro rispetto ad x^2 dà la

$$\left[\frac{1}{x^2}f(x)\right]^{(n+1)} = a_0\left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\frac{\Pi(n+1)}{x^{2(n+2)}}.a_0,$$

si avrà anche la relazione:

$$(7) \qquad K_1 h_n + K_2 h_{n-1} + \cdots + K_n h_1 = (-1)^{n+1}\frac{a_0}{x^{2(n+2)}}.$$

Sostituendo in quest'ultima per $h_1, h_2, \ldots h_n$ i valori dati dalle equazioni (6), si avrà infine il chiesto valore di a_0.

Sia

$$H = \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & \ldots & H_n \\ H_2 & H_3 & \ldots & H_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_n & H_{n+1} & \ldots & H_{2n-1} \end{vmatrix},$$

e si indichi con K l'analogo determinante formato colle $K_1, K_2, \ldots$. Evidentemente il primo membro della relazione (7), in causa delle (6), è eguale al determinante

$$\begin{vmatrix} K_1 & K_2 & \ldots & K_n \\ H_2 & H_3 & \ldots & H_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_n & H_{n+1} & \ldots & H_{2n-1} \end{vmatrix}$$

diviso per H. Ma, per la relazione $A(x) = x^2 B(x)$, si ha che

$$(8) \qquad H_r = x^2 K_r + K_{r-1};$$

quindi quest'ultimo determinante è eguale a $x^{2(n-1)}K$, e la stessa relazione (7) darà:

$$a_0 = (-1)^{n+1}x^{2(2n+1)}\frac{K}{H},$$

ed infine:

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{sn}(2n+1)u = (-1)^{n+1} x^{2n+1} \frac{K}{H}.$$

3. Analogamente, per la moltiplicazione di ordine pari $2n$, ponendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{2(n-1)} + z^{2n},$$
$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z^2 + \cdots + b_{n-1} z^{2(n-1)},$$

e supponendo che la equazione

$$f^2(z) z^2 - \varphi^2(z) \Delta^2(z) = 0$$

abbia $2n$ radici eguali ad x^2 ed una radice eguale ad y^2, si ha la equazione trascendente

$$2n \frac{dx}{\Delta(x)} = \frac{dy}{\Delta(y)},$$

alla quale corrisponde l'equazione algebrica

$$y = \operatorname{sn} 2nu = -\frac{b_0}{x^{2n}}.$$

Per determinare il valore di b_0 si hanno dapprima, dalla equazione identica

$$f(x) = \varphi(x) B(x),$$

le n equazioni:

$$K_0 b_n + K_1 b_{n-1} + \cdots + K_{n-1} b_1 = 1,$$
$$K_1 b_n + K_2 b_{n-1} + \cdots + K_n b_1 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_{n-1} b_n + K_n b_{n-1} + \cdots + K_{2n-2} b_1 = 0,$$

dalle quali si ponno dedurre i valori delle b_1, b_2, ... b_n. Inoltre la

$$\left[\frac{1}{x^2}\varphi(x)\right]^{(n-1)} = b_0 \left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \frac{\Pi(n-1)}{x^{2n}} b_0$$

conduce alla seguente

$$b_n - \frac{1}{x^2} b_{n-1} + \frac{1}{x^4} b_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{x^{2(n-1)}} b_1 = (-1)^{n-1} \frac{b_0}{x^{2(n-1)}};$$

e siccome sostituendo nel primo membro di essa quei valori di b_1, b_2, ... si ottiene

il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^4} & \dots & \frac{(-1)^{n-1}}{x^{2(n-1)}} \\ K_1 & K_2 & K_3 & \dots & K_n \\ K_2 & K_3 & K_4 & \dots & K_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-1} & K_n & K_{n+1} & \dots & K_{2(n-1)} \end{vmatrix}$$

diviso pel determinante

$$U = \begin{vmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{n-1} \\ K_1 & K_2 & \dots & K_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-1} & K_n & \dots & K_{2(n-1)} \end{vmatrix},$$

e siccome per la relazione (8) il determinante precedente è eguale a

$$\frac{1}{x^{2(n-1)}} \begin{vmatrix} H_2 & H_3 & \dots & H_n \\ H_3 & H_4 & \dots & H_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n & H_{n+1} & \dots & H_{2(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^{2(n-1)}} V,$$

così si avrà:

$$b_0 = (-1)^{n-1} \frac{V}{U},$$

od infine:

$$\text{sn}\, 2nu = (-1)^n \frac{1}{x^{2n}} \frac{V}{U}. \tag{10}$$

Le formole (9), (10) per la moltiplicazione d'ordine dispari o d'ordine pari delle funzioni ellittiche dimostrano il teorema già enunciato da JACOBI *).

Formole analoghe alle superiori si ottengono considerando, in luogo delle espressioni irrazionali $A(x)$, $B(x)$, le $\frac{1}{A(x)}$, $\frac{1}{B(x)}$.

---

*) Queste formole formarono argomento di una mia Nota: *Sopra una formola di* JACOBI *per la moltiplicazione delle funzioni ellittiche* [t. III, pp. 199-204].

APPENDICE SECONDA.

La trasformazione delle funzioni ellittiche.

1. Indicando con $\varphi(x)$, $\psi(y)$ due polinomî del quarto grado in x ed in y, e con $F(x, y)$ una funzione intiera, razionale, di x e di y, di grado n rispetto ad x e di grado m rispetto ad y, supponiamo che la equazione

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

sia un integrale della

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}}. \tag{2}$$

Sia z una radice della equazione (1) risolta rispetto ad x; sia, cioè, identicamente

$$F(z, y) = 0;$$

con essa sussisterà la sua derivata

$$F'(z)dz + F'(y)dy = 0,$$

ossia, per la (2), la

$$F'^2(z)\varphi(z) - F'^2(y)\psi(y) = 0. \tag{3}$$

Quest'ultima equazione dimostra che il binomio

$$F'^2(x)\varphi(x) - F'^2(y)\psi(y),$$

il quale è identicamente nullo per $x = z$, contiene, siccome fattore, la funzione stessa $F(x, y)$; si avrà dunque:

$$F'^2(x)\varphi(x) - F'^2(y)\psi(y) = F(x, y)E(x, y), \tag{4}$$

essendo $E(x, y)$ un polinomio in x ed in y, di grado $n+2$ rispetto ad x e di grado $m+2$ rispetto ad y. Si differenzî ora l'equazione (4) prima per x, poi per y, e pongasi $x = z$ nel risultato; si ottengono le due relazioni:

$$F'(z)E = 2\varphi(z)F'(z)F''(z) + \varphi'(z)F'^2(z) - 2\psi(y)F'(y)F''(z, y),$$

$$F'(y)E = 2\varphi(z)F'(z)F''(z, y) - 2\psi(y)F'(y)F''(y) - \psi'(y)F'^2(y),$$

le quali, divisa la prima per $F'(z)$, la seconda per $F'(y)$ e sommate, osservando essere per la (3)

$$\varphi(z)\frac{F'(z)}{F'(y)} = \psi(y)\frac{F'(y)}{F'(z)},$$

dànno la

$$E(z, y) = \varphi(z)F''(z) + \tfrac{1}{2}\varphi'(z)F'(z) - \psi(y)F''(y) - \tfrac{1}{2}\psi'(y)F'(y).$$

Pongasi per brevità

$$\Phi(x,\ y) = \varphi(x) F''(x) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x) F'(x) - \psi(y) F''(y) - \tfrac{1}{2}\psi'(y) F'(y);$$

l'ultima equazione potrà scriversi

$$E(z,\ y) = \Phi(z,\ y),$$

cioè sarà in generale

$$E(x,\ y) = \Phi(x,\ y) + F(x,\ y)\, G(x,\ y),$$

essendo $G(x,\ y)$ un polinomio del secondo grado in x ed in y. Sostituendo questo valore di E nella equazione (4), si otterrà infine la equazione identica

$$(5)\quad \varphi(x) F'^2(x) - \psi(y) F'^2(y) - F(x,\ y)\Phi(x,\ y) - F^2(x,\ y)\, G(x,\ y) = 0,$$

la quale coll'eguagliare a zero i coefficienti delle varie potenze della y darà $2m+3$ equazioni in x pure identiche, e quindi da queste a sua volta si otterrà una serie di relazioni fra i coefficienti dei polinomî φ, ψ e della funzione F.

2. Sia $m = 1$, cioè $F(x,\ y)$ lineare rispetto ad y. Pongasi

$$F(x,\ y) = U(x) - y\, V(x),$$

essendo $U(x)$ del grado n e $V(x)$ del grado $n-1$. Supposto

$$G(x,\ y) = p + qy + ry^2,$$

nella quale p, q, r sono polinomî del secondo grado in x, il primo membro della equazione (5) sarà del 4° grado in y, ed eguagliando a zero i coefficienti delle varie potenze di y si avranno così cinque equazioni. Sia

$$\psi(y) = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e,$$

le cinque equazioni sono le seguenti:

$$(6)\quad \begin{cases} r = a, \qquad q = \tfrac{1}{2} b, \\ \varphi(x)(V V'' - V'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x) V V' + a U^2 + \tfrac{1}{2} b U V + p V^2 = 0, \\ \varphi(x)(V U'' + U V'' - 2 U' V') + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)(U V' + V U') \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2} b U^2 - c U V - \tfrac{1}{2} d V^2 + 2 p U V = 0, \\ \varphi(x)(U U'' - U'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x) U U' + e V^2 + \tfrac{1}{2} d U V + p U^2 = 0. \end{cases}$$

3. Posto il moltiplicatore $M = \frac{1}{\mu}$, la relazione dell'art. 223 (pag. 149) del testo, può scriversi

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\mu}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}. \tag{7}$$

Se

$$\varphi(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2), \qquad \psi(y) = \mu^2(1-y^2)(1-\lambda^2y^2),$$

le ultime relazioni superiori dànno:

$$\varphi(x)(VV'' - V'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)VV' + \mu^2\lambda^2U^2 + pV^2 = 0,$$

$$\varphi(x)(VU'' + UV'' - 2U'V') + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)(UV' + VU')$$
$$+ \mu^2(1+\lambda^2)UV + 2pUV = 0,$$

$$\varphi(x)(UU'' - U'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)UU' + \mu^2V^2 + pU^2 = 0;$$

e da queste, indicando con A, B le espressioni

$$A = V - U, \qquad B = V + U,$$

si deducono le seguenti:

$$\varphi(x)(AA'' - A'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)AA' + pA^2 + \tfrac{1}{2}\mu^2(1+\lambda^2)A^2 + \tfrac{1}{2}\mu^2(1-\lambda^2)AB = 0,$$

$$\varphi(x)(AB'' + BA'' - 2A'B') + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)(AB' + BA') + 2pAB$$
$$- \mu^2(1+\lambda^2)AB - \tfrac{1}{2}\mu^2(1-\lambda^2)(A^2 + B^2) = 0,$$

$$\varphi(x)(BB'' - B'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)BB' + pB^2 + \tfrac{1}{2}\mu^2(1+\lambda^2)B^2 + \tfrac{1}{2}\mu^2(1-\lambda^2)AB = 0.$$

Se infine si pone

$$A = X^2(1-x), \qquad B = Y^2(1+x),$$

si ottengono le tre relazioni:

$$(8)\quad \begin{cases} 2(1-x)\left[\varphi(x)(XX'' - X'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)XX' + \tfrac{1}{2}pX^2 + \tfrac{1}{4}\mu^2(1+\lambda^2)X^2\right] \\ \qquad - (1+x)\left[(1-k^2x^2)X^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2(1-\lambda^2)Y^2\right] - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)X^2 = 0, \\ 2(1+x)\left[\varphi(x)(YY'' - Y'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)YY' + \tfrac{1}{2}pY^2 + \tfrac{1}{4}\mu^2(1+\lambda^2)Y^2\right] \\ \qquad - (1-x)\left[(1-k^2x^2)Y^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2(1-\lambda^2)X^2\right] + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)Y^2 = 0, \\ \varphi(x)(XY'' + YX'' - 2X'Y') + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)(XY' + YX') \\ \qquad + pXY + 2(1-k^2x^2)(XY' - YX') + k^2x^2XY = 0. \end{cases}$$

Si osservi ora che, per le relazioni sopra stabilite, dalla $y = \frac{U}{V}$ si deduce la

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{X^2}{Y^2}\frac{1-x}{1+x};$$

quindi per la prima equazione dell'articolo 227 (pag. 152) del testo, si avrà

$$X = P - Qx, \qquad Y = P + Qx,$$

nelle quali le P, Q non contengono se non potenze pari di x.

La terza delle relazioni (8) dimostra tosto che anche p non può contenere che potenze pari di x, ed è perciò

$$p = p_0 + p_1 x^2.$$

Posto

$$P = 1 + \beta x^2 + \delta x^4 + \cdots, \qquad Q = \alpha + \gamma x^2 + \cdots,$$

se si fa $x = 0$ nell'ultima delle (8) si ha:

$$p_0 = -2(\alpha^2 + 2\alpha + 2\beta),$$

mentre il coefficiente di x^{n+1} nella stessa dà:

$$p_1 = -nk^2;$$

pei quali valori, posto $x = 0$ nella prima o nella seconda delle (8), si ottiene

$$\mu = 2\alpha + 1.$$

Dal confronto delle altre $\frac{n-1}{2}$ potenze di x^2 nell'ultima delle superiori si dedurranno $\frac{n-1}{2}$ relazioni, le quali daranno $\frac{n-1}{2}$ valori per k^2, o meglio un valore di k^2 ed $\frac{n-3}{2}$ relazioni fra le α, β, γ, ...

4. Sia $n = 3$, quindi:

$$X = 1 - \alpha x, \qquad Y = 1 + \alpha x;$$

l'ultima delle (8) dà tosto:

$$k^2 = \frac{\alpha^3(\alpha + 2)}{2\alpha + 1},$$

e l'una o l'altra delle prime

$$\lambda^2 = \alpha\frac{(\alpha + 2)^3}{(2\alpha + 1)^3},$$

come nel testo (pag. 170).

Così, se $n = 5$, dall'ultima si ottengono le

$$k^2 = \frac{\beta^2(\alpha^2 + 2\alpha + 2\beta)}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta} = \frac{1}{2}\frac{\alpha^4 + 2\alpha^3 - 6\beta^2 - 6\alpha\beta - 4\beta}{\alpha + 2\beta + 1},$$

ed il coefficiente di x^5 nella prima dà:

$$\mu\beta\lambda = k(\beta + 2\alpha),$$

da cui:

$$\lambda = k\frac{\beta + 2\alpha}{\beta(2\alpha + 1)},$$

e così di seguito.

5. Se in luogo della equazione differenziale (7) si considera la

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - \alpha x^2 + x^4}} = \frac{1}{v}\frac{dy}{\sqrt{1 - \beta y^2 + y^4}},$$

nella quale

$$\alpha = \frac{1 + k^2}{k}, \qquad \beta = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda}, \qquad v = \mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}},$$

le tre relazioni (6) diventano le

$$\varphi(x)(VV'' - V'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)VV' + v^2U^2 + pV^2 = 0,$$

$$\varphi(x)(UV'' + VU'' - 2U'V') + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)(UV' + VU') + \beta v^2 UV + 2pUV = 0,$$

$$\varphi(x)(UU'' - U'^2) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)UU' + v^2V^2 + pU^2 = 0,$$

essendo

$$U(x) = x(Bx^{n-1} + B_1x^{n-3} + \cdots + B_{\frac{n-3}{2}}x^2 + B_{\frac{n-1}{2}}),$$

$$V(x) = B_{\frac{n-1}{2}}x^{n-1} + B_{\frac{n-3}{2}}x^{n-3} + \cdots + B_1x^2 + B.$$

Ponendo $x = 0$ nella prima e nella terza delle superiori, si hanno le

$$p_0 = -2\frac{B_1}{B}, \qquad v = \frac{B_{\frac{n-1}{2}}}{B},$$

e dal coefficiente della più alta potenza di x nell'ultima si deduce:

$$p_1 = -n.$$

Si ottengono così le formole di JACOBI, di cui nella seguente Appendice.

APPENDICE TERZA *).

La risoluzione delle equazioni del quinto grado.

CAPITOLO PRIMO.

La equazione del moltiplicatore nella trasformazione delle funzioni ellittiche **).

1. La notazione, della quale faremo più specialmente uso in questo capitolo, è quella adottata da JACOBI nelle sue celebri Memorie dei volumi 3° e 4° del Giornale di CRELLE e con qualche modificazione nei *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*.

Supposto quindi n numero primo; $U(x)$, $V(x)$ due polinomi in x dei gradi n, $n-1$, e

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - \alpha x^2 + x^4}, \qquad \psi(y) = \sqrt{1 - \beta y^2 + y^4},$$

se la equazione algebrica

$$U(x) - y V(x) = 0 \tag{1}$$

soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{dy}{\psi(y)} = v \frac{dx}{\varphi(x)}, \tag{2}$$

dove v è una costante, si dirà che la (1) rappresenta una trasformazione di ordine n della (2).

Le α, β sono funzioni dei moduli k, λ e cioè:

$$\alpha = \frac{1+k^2}{k}, \qquad \beta = \frac{1+\lambda^2}{\lambda}, \tag{3}$$

ed indicando con μ il moltiplicatore, si ha:

$$v = \mu \sqrt{\frac{\lambda}{k}}.$$

---

*) Questa terza appendice è, con lievi modificazioni, la traduzione della Memoria: *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* [Mathematische Annalen, t. XIII (1878), pp. 109-160].

**) In questo primo capitolo si contengono i risultati ottenuti dall'Autore nei seguenti lavori:

1° *Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche* [XLIX: t. I, pp. 321-324].

2° *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVII (1858), pp. 310-313].

3° *Sopra alcune nuove relazioni modulari* [CLXII: t. IV, pp. 161-176].

Dalla (2) si hanno inoltre le

$$x = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}(u, k), \qquad y = \sqrt{\lambda}.\,\mathrm{sn}(\mu u, \lambda),$$

ed in conseguenza

$$(4) \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{k}.\,\varphi(x), \qquad \frac{dy}{du} = \sqrt{k}.\,v\psi(y).$$

I polinomi $U(x)$, $V(x)$ si ponno esprimere in due modi differenti; o sotto la forma

$$U(x) = x(Bx^{n-1} + B_1 x^{n-3} + \cdots + B_{\frac{n-3}{2}} x^2 + B_{\frac{n-1}{2}}),$$

$$V(x) = B + B_1 x^2 + B_2 x^4 + \cdots + B_{\frac{n-3}{2}} x^{n-3} + B_{\frac{n-1}{2}} x^{n-1},$$

oppure, ponendo

$$(5) \qquad \omega = \frac{mK + m'iK'}{n}, \qquad g_s = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}(2s\omega, k),$$

sotto la

$$(6) \qquad U(x) = Bx\prod_s (x^2 - g_s^2), \qquad V(x) = B\prod_s (1 - g_s^2 x^2)$$

per $s = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$. L'uno e l'altro di quei polinomi soddisfano poi all'equazione differenziale parziale

$$\varphi^2(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (n-1)\varphi(x)\varphi'(x)\frac{\partial U}{\partial x} + n(n-1)x^2 U = 2n(\alpha^2 - 4)\frac{\partial U}{\partial \alpha},$$

e quindi fra tre coefficienti consecutivi B_{r+1}, B_r, B_{r-1} sussisterà la relazione

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2n(\alpha^2 - 4)\frac{\partial B_r}{\partial \alpha} &= (2r+1)(2r+2)B_{r+1} + 2r(n-2r)\alpha B_r \\ &+ (n-2r+1)(n-2r+2)B_{r-1}. \end{aligned} \right.$$

A due altre equazioni differenziali meno note *) devono altresì soddisfare identi-

*) Queste equazioni differenziali, alle quali si può giungere facilmente con semplici considerazioni algebriche, si trovano in una Memoria di JACOBI: *De functionibus ellipticis commentatio* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. IV (1829), pp. 371-390] [pag. 376, equazioni (20) (21)]. Vedi la precedente Appendice.

camente i polinomî $U(x)$, $V(x)$; esse sono:

$$\left[V\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\varphi^2(x)+V\frac{\partial V}{\partial x}\varphi(x)\varphi'(x)-(2A_1+nx^2)V^2+v^2U^2=0,$$

$$\left[U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]\varphi^2(x)+U\frac{\partial U}{\partial x}\varphi(x)\varphi'(x)-(2A_1+nx^2)U^2+v^2V^2=0,$$

nelle quali A_1 si determina come in generale:

$$A_r=\frac{B_r}{B}\,.$$

Da queste equazioni si deducono, ponendo a confronto le medesime potenze della x, una serie di relazioni algebriche fra i coefficienti B, o meglio A, le quali meritano qualche considerazione. Si ha dapprima

$$v=A_{\frac{n-1}{2}},$$

come altronde è noto, essendo

$$B=\sqrt{\mu\frac{\lambda'}{k'}},\qquad B_{\frac{n-1}{2}}=\mu\sqrt{\mu\frac{\lambda\lambda'}{kk'}};$$

inoltre le

$$v^4-6(A_1^2-2A_2)-4\alpha A_1-n=0,$$

$$A_{\frac{n-3}{2}}v^3-(A_1^3+3A_1A_2-15A_3)-8\alpha A_2-(n-3)A_1=0,$$

$$2A_{\frac{n-5}{2}}v^3+A^2_{\frac{n-3}{2}}v^2-2(2A_1^2A_2+2A_2^2-2A_1A_3-27A_4)$$
$$-4\alpha(A_1A_2+9A_3)-(n-2)A_1^2-2(n-10)A_2=0,$$

e così di seguito. Da esse si ponno dedurre le equazioni algebriche alle quali soddisfano i coefficienti A_1, A_2, ... Per esempio, se $n=3$, essendo $A_1=v$, $A_2=0$, la prima delle relazioni superiori dà per $v=A_1$ la equazione

$$v^4-6v^2-4\alpha v-3=0; \tag{8}$$

se $n=5$, essendo $A_2=v$, $A_3=0$, le prime due conducono alle

$$A_1^2=v(v^2-2v+5),\qquad 4\alpha A_1=(v^2-2v+5)(v^2-4v-1),$$

per le quali:

$$(v^2-2v+5)(v^2-4v-1)^2-16\alpha^2v=0,$$

od anche:

$$(9) \qquad (v-1)^6 - 4(v-1)^5 - 16(\alpha^2-4)(v-1) - 16(\alpha^2-4) = 0.$$

2. Se si indicano con $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ le n radici della equazione (1), si hanno le

$$x = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}(u, k), \qquad x_r = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}(u + 4r\omega, k),$$

e dalla

$$U(x) - yV(x) = B\prod_r (x - x_r) \qquad (r = 0, 1, \ldots n-1)$$

si dedurranno le

$$(10) \qquad vy = \sum^r x_r, \qquad y = \prod_r x_r.$$

L'elemento ω ha $n+1$ valori, che conducono ad $n+1$ trasformazioni diverse; essi sono

$$\omega = \frac{K}{n}, \qquad \omega_m = \frac{mK + iK'}{n} \qquad (m = 0, 1, \ldots n-1);$$

ai medesimi corrispondono quindi $n+1$ valori di y e di x_r ed $n+1$ valori di λ e di μ, i quali indicheremo con

$$y, \quad y_m; \quad x_r, \quad x_{r,m},$$
$$\lambda, \quad \lambda_m; \quad \mu, \quad \mu_m.$$

Gli $n(n-1)$ valori che si ottengono da $x_{r,m}$ ponendo

$$r = 1, 2, \ldots n-1; \qquad m = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

aggiunti alle n radici $x, x_1, \ldots x_{n-1}$ costituiscono le n^2 radici della equazione per la moltiplicazione. Se quindi si rappresenta con S_r la somma delle potenze r^{me} delle radici della equazione di moltiplicazione, e con s_r la somma delle stesse potenze per le radici corrispondenti ad una delle $n+1$ trasformazioni, si avrà la relazione:

$$(11) \qquad S_r + nx^r = \sum s_r,$$

il segno sommatorio estendendosi alle $n+1$ trasformazioni. Analogamente si avrà:

$$(12) \qquad \prod y = x^n z,$$

posto

$$z = \sqrt{k}.\,\mathrm{sn}(nu, k).$$

Per $r = 1$, essendo $S_1 = nz$ ed essendo s_1, come si è visto sopra, eguale a vy, si avrà *):

$$z + x = \frac{1}{n}\sum vy, \tag{13}$$

nella quale formola, come nelle altre, il moltiplicatore μ corrispondente alla trasformazione $\omega = \frac{K}{n}$ deve intendersi affetto dal segno $\rho = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Ora per le

$$\mu K = n\Lambda, \qquad \mu_m K = \Lambda_m,$$

se nella (13) si pone $u = K$, essendo in questo caso

$$y = \rho\sqrt{\lambda}, \qquad y_m = \sqrt{\lambda_m}; \qquad z = \rho\sqrt{k}, \qquad x = \sqrt{k},$$

si avrà che

$$\sum \mu \frac{\lambda}{k} = (\rho + 1)n,$$

e siccome per la (2) mutando k in $\frac{1}{k}$, λ in $\frac{1}{\lambda}$, la μ diventa $\mu\frac{\lambda}{k}$, si avrà anche:

$$\sum \mu = (\rho + 1)n,$$

vale a dire il coefficiente del secondo termine dell'equazione del moltiplicatore sarà nullo od eguale a $-2n$, secondo che $\frac{n-1}{2}$ è numero dispari o pari.

Ponendo in secondo luogo nella (11) $r = 2$, essendo

$$S_2 = n^2 z^2, \qquad s_2 = v^2 y^2 - 2A_1,$$

si avrà:

$$nz^2 + x^2 = \frac{1}{n}\left(\sum v^2 y^2 - 2\sum A_1\right).$$

Facendo in questa $u = 0$, siccome x, y, z si annullano, dovrà essere

$$\sum A_1 = 0,$$

e la formola stessa diventa:

$$nz^2 + x^2 = \frac{1}{n}\sum v^2 y^2, \tag{14}$$

*) Questa formola trovasi pure in una Memoria di JACOBI: *Suite des notices sur les fonctions elliptiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. IV (1829) pp. 185-193 (pag. 191)]; ma contiene un errore di stampa.

nella quale ponendo come sopra $u = K$ e mutando la k in $\frac{1}{k}$, si ottiene la

$$\sum \mu^2 = n(n+1).$$

Quindi il coefficiente del terzo termine nell'equazione del moltiplicatore è eguale a $-\frac{n(n+1)}{2}$, se $\frac{n-1}{2}$ è dispari, od eguale a $\frac{n(3n-1)}{2}$, se $\frac{n-1}{2}$ è pari.

Differenziando la (13) rispetto ad u, rammentando le (4) ed osservando essere

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{k}.n\varphi(z),$$

si ottiene:

$$n\varphi(z) + \varphi(x) = \frac{1}{n}\sum v^2 \psi(y).$$

Questa, differenziata una seconda volta rispetto ad u, dà:

$$n^2 z(2z^2 - \alpha) + x(2x^2 - \alpha) = \frac{1}{n}\sum v^3 y(2y^2 - \beta),$$

ove le α, β hanno i valori (3). Se in questa si pone $u = K$, si giunge alla

$$\sum \mu^3 \frac{\lambda\lambda'^2}{kk'^2} = n(\rho n^2 + 1),$$

e mutando k in $\frac{1}{k}$:

$$\sum \mu^3 \lambda'^2 = n(\rho n^2 + 1)k'^2,$$

e siccome sostituendo k a k', λ a λ', il moltiplicatore devesi intendere affetto dal segno ρ (*Fundamenta nova,* pag. 58), si avrà:

$$\sum \mu^3 \lambda^2 = n(\rho n^2 + 1)\rho k^2,$$

la quale sommata colla superiore dà:

$$\sum \mu^3 = n(\rho n^2 + 1)(k'^2 + \rho k^2).$$

Così, differenziando due volte rispetto ad u la relazione (14), e ponendo nel risultato $u = 0$, si ottiene:

$$\sum \mu^4 \lambda^2 = n(n^3 + 1)k^2,$$

e mutando la k in k' e sommando:

$$\sum \mu^4 = n(n^3 + 1).$$

È facile il vedere come il procedimento qui usato possa dar luogo a molte altre relazioni; noteremo solo fra queste le due seguenti:

$$\sum \mu \sqrt{\frac{\lambda}{k}} = (\rho + 1)n, \qquad \sum \mu \frac{\lambda'}{k'} = (\rho + 1)n,$$

dalle quali si deduce che il coefficiente del secondo termine delle equazioni, di cui le radici sono

$$(15) \qquad \left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu \frac{\lambda}{k}}\right)^2, \qquad \left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu \frac{\lambda'}{k'}}\right)^2,$$

è in ogni caso eguale a zero.

Per determinare il coefficiente dell'ultimo termine, si osservi dapprima che la equazione (12), nella quale si faccia $u = K$, conduce alla

$$\prod \sqrt{\lambda} = k^{\frac{n+1}{2}}.$$

Poi, siccome differenziando rispetto ad u la seconda delle (10) e ponendo $u = 0$ si ha

$$v_m = x_{1,m} x_{2,m} \ldots x_{n-1,m},$$

essendo nel secondo membro

$$x_{r,m} = \operatorname{sn}(4r\omega_m, k),$$

per la equazione della moltiplicazione sarà

$$\prod v_m = \rho \prod \mu \sqrt{\frac{\lambda}{k}} = n,$$

la quale per l'antecedente conduce alla

$$\prod \mu = \rho n,$$

cioè il coefficiente dell'ultimo termine dell'equazione del moltiplicatore è indipendente da k ed eguale a $+n$ od a $-n$, secondo che $\frac{n-1}{2}$ è numero pari o dispari.

3. JACOBI ha, nel terzo volume del Giornale di CRELLE *), enunciato un teorema rispetto alle radici dell'equazione del moltiplicatore che egli stesso dichiara « *un des plus*

*) JACOBI, *Suite des notices sur les fonctions elliptiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. III (1828), pp. 303-310 (pag. 308)].

importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques ».

Il teorema enunciato da JACOBI è il seguente: *fra le radici quadrate delle* $n+1$ *radici dell'equazione del moltiplicatore*

$$\sqrt{\mu},\ \sqrt{\mu_0},\ \sqrt{\mu_1},\ \dots\ \sqrt{\mu_{n-1}}$$

sussistono $\frac{n+1}{2}$ *relazioni lineari. La stessa proprietà si verifica,* aggiunge JACOBI, *per le radici delle equazioni che esprimono per k le*

$$\lambda\mu,\quad \lambda'\mu,\quad \dots$$

Posto

$$e^{\frac{-\pi K'}{K}} = q,$$

è noto essere

$$\sqrt{K} = \sum q^{g^2},\quad \sqrt{Kk} = \sum q^{\frac{1}{4}h^2},\quad \sqrt{Kk'} = \sum (-1)^g q^{g^2},$$

nelle quali g rappresenta tutti i numeri interi da $-\infty$ a $+\infty$ ed h tutti i numeri *dispari* positivi e negativi *). Si avranno quindi le

$$\sqrt{\Lambda} = \sum q^{ng^2},\qquad \sqrt{\Lambda_m} = \sum q_m^{g^2},$$

essendo $q_m = \varepsilon^m q^{\frac{1}{n}}$ ed $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Si ha inoltre:

$$\sqrt{\Lambda\lambda} = \sum q^{\frac{1}{4}nh^2},\qquad \sqrt{\Lambda_m\lambda_m} = \sum q_m^{\frac{1}{4}h^2},$$

$$\sqrt{\Lambda\lambda'} = \sum (-1)^g q^{ng^2},\qquad \sqrt{\Lambda_m\lambda'_m} = \sum (-1)^g q_m^{g^2},$$

ed anche:

$$(16)\quad \begin{cases} \sqrt{K\mu} = \sqrt{\rho n}\sum q^{ng^2}, & \sqrt{K\mu_m} = \sum q_m^{g^2}, \\ \sqrt{K\lambda\mu} = \sqrt{\rho n}\sum q^{\frac{1}{4}nh^2}, & \sqrt{K\mu_m\lambda_m} = \sum q_m^{\frac{1}{4}h^2}, \\ \sqrt{K\lambda'\mu} = \sqrt{\rho n}\sum (-1)^g q^{ng^2}, & \sqrt{K\mu_m\lambda'_m} = \sum (-1)^g q_m^{g^2}. \end{cases}$$

*) Questa opportuna notazione fu adottata recentemente dal professore KRONECKER nella sua Nota: *Ueber die algebraischen Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt* [Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Juli 1875, pp. 498-507].

Consideriamo ora la serie doppiamente infinita

$$\sum q_m^{g^2},$$

ed osserviamo che, rappresentando in essa la g tutti i numeri interi da $-\infty$ a $+\infty$, potremo sostituire a g il binomio $gn+s$, purchè s possa assumere i valori 0, 1, 2, ..., $n-1$. La serie superiore diventerà così la

$$\sum_0^{n-1} {}_s\, \varepsilon^{ms^2} q^{\frac{s^2}{n}} \sum q^{ng^2+2sg},$$

la quale non varia mutando la s in $-s$, potendosi sostituire $-g$ a g. Essa sarà quindi eguale a

$$\sum q^{ng^2} + 2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_s\, \varepsilon^{ms^2} q^{\frac{s^2}{n}} \sum q^{ng^2+2sg},$$

e ponendo

$$a_0 \sqrt{K} = \sum q^{ng^2}, \qquad a_s \sqrt{K} = 2\, q^{\frac{s^2}{n}} \sum q^{ng^2+2sg},$$

si otterranno le

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\rho n}.a_0, \qquad \sqrt{\mu_m} = a_0 + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_s\, \varepsilon^{ms^2}.a_s. \tag{17}$$

Le $a_0, a_1, \ldots a_{\frac{n-1}{2}}$ essendo in numero $\frac{n+1}{2}$, sussisteranno dunque, come aveva enunciato JACOBI, $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari fra le radici quadrate degli $n+1$ valori del moltiplicatore. Analogamente si otterrebbero le

$$\sqrt{\mu_m \lambda_m} = \sum q^{\frac{1}{4}nh^2} + 2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_s\, \varepsilon^{ms^2} q^{\frac{s^2}{n}} \sum q^{\frac{1}{4}nh^2+sh},$$

$$\sqrt{\mu_m \lambda'_m} = \sum (-1)^g q^{ng^2} + 2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_s\, (-1)^s \varepsilon^{ms^2} q^{\frac{s^2}{n}} \sum (-1)^g q^{ng^2+2sg},$$

le quali dimostrano appunto che la stessa proprietà ha luogo per le radici delle equazioni che dànno $\lambda\mu$, $\lambda'\mu$, ... Le $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari che si deducono dalle (17) sono le seguenti:

$$\sum {}_m \sqrt{\mu_m} = \rho \sqrt{\rho n \mu}, \qquad \sum {}_m\, \varepsilon^{mr} \sqrt{\mu_m} = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots n-1), \tag{18}$$

essendo r residuo quadratico di n se $\frac{n-1}{2}$ è dispari, e non residuo quadratico nel caso contrario.

I coefficienti dell'equazione del moltiplicatore e di tutte le altre, di cui le radici hanno la proprietà indicata da JACOBI, che hanno cioè, secondo l'espressione di GALOIS, il medesimo *gruppo* dell'equazione del moltiplicatore, o secondo KRONECKER la medesima *affezione* della equazione stessa, si potranno dunque esprimere in causa delle relazioni (17) in funzioni intiere e razionali di $\frac{n+1}{2}$ quantità $a_0, a_1, \ldots, a_{\frac{n-1}{2}}$.

Per $n = 3$, posto

$$\sqrt{z} = a_0\sqrt{-3}, \qquad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 \qquad (m = 0, 1, 2),$$

si avrà l'equazione

$$z^4 - 6az^2 + bz - 3a^2 = 0, \tag{19}$$

essendo

$$a = a_0(a_0^3 + a_1^3), \qquad b = 8a_0^6 - 20a_0^3a_1^3 - a_1^6.$$

Per $n = 5$, dalle

$$\sqrt{z} = a_0\sqrt{5}, \qquad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2 \qquad (m = 0, 1, 2, 3, 4),$$

si deducono le

$$(20)\quad \begin{cases} (z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 10b(z-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0, \\ a = a_0^2 + a_1a_2, \\ b = 8a_0^4a_1a_2 - 2a_0^2a_1^2a_2^2 + a_1^3a_2^3 - a_0(a_1^5 + a_2^5), \\ c = 80a_0^6a_1^2a_2^2 - 40a_0^4a_1^3a_2^3 + 5a_0^2a_1^4a_2^4 + a_1^5a_2^5 \\ \qquad - a_0(32a_0^4 - 20a_0^2a_1a_2 + 5a_1^2a_2^2)(a_1^5 + a_2^5) + \frac{1}{4}(a_1^5 + a_2^5)^2, \end{cases}$$

e per la equazione del moltiplicatore saranno, nel primo caso

$$a = 1, \qquad b = 8(1 - 2k^2),$$

nel secondo

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = -64k^2k'^2.$$

4. Indicando in generale per una trasformazione di ordine n con

$$F(\mu, k) = 0$$

l'equazione del moltiplicatore, siccome il coefficiente dell'ultimo termine, per quanto si

è dimostrato sopra, è indipendente da k, si avrà che

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \mu\varphi(\mu),$$

essendo $\varphi(\mu)$ un polinomio di grado non superiore ad $n-1$. Per una radice qualsivoglia della equazione stessa si avrà quindi:

$$\frac{d\sqrt{\mu}}{dk} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi(\mu)}{F'(\mu)}\sqrt{\mu} = \psi_1(\mu)\sqrt{\mu},$$

essendo $\psi_1(\mu)$ un polinomio di grado inferiore ad $n+1$. Analogamente si otterranno le

$$\frac{d^2\sqrt{\mu}}{dk^2} = \psi_2(\mu)\sqrt{\mu}, \qquad \frac{d^3\sqrt{\mu}}{dk^3} = \psi_3(\mu)\sqrt{\mu}, \qquad \ldots$$

ed evidentemente anche le $\frac{n-1}{2}$ espressioni così trovate

$$\psi_1(\mu)\sqrt{\mu}, \qquad \psi_2(\mu)\sqrt{\mu}, \qquad \ldots \qquad \psi_{\frac{n-1}{2}}(\mu)\sqrt{\mu}$$

soddisferanno al teorema di JACOBI.

Per $n=3$ si ha facilmente:

$$12kk'^2\frac{d\sqrt{\mu}}{dk} = -[\mu^3 - 7\mu + 6(1-2k^2)]\sqrt{\mu}.$$

Per $n=5$, essendo

$$F(\mu, k) = (\mu-1)^6 - 4(\mu-1)^5 + 256k^2k'^2\mu = 0,$$

si ha dapprima la

$$F'(\mu)\frac{d\sqrt{\mu}}{dk} = -256k(1-2k^2)\sqrt{\mu},$$

dalla quale, osservando che le identità

$$\mu F'(\mu) = 5(\mu-1)^4(\mu^2-4\mu-1),$$

$$(\mu^2-4\mu-1)^2(\mu^2-2\mu+5) = 64(1-2k^2)^2\mu$$

hanno per conseguenza

$$\frac{320(1-2k^2)^2}{F'(\mu)} = 1 - 8\frac{\mu+1}{(\mu-1)^4} - \frac{2}{\mu-1},$$

e ponendo

$$\sqrt{\mu'} = 128 k^2 k'^2 \frac{\mu + 1}{(\mu - 1)^4} \sqrt{\mu}, \qquad \sqrt{\mu''} = - 128 k^2 k'^2 \frac{1}{\mu - 1} \sqrt{\mu},$$

si otterranno le

$$(21) \quad \begin{cases} 400 k k'^2 (1 - 2k^2) \dfrac{d\sqrt{\mu}}{dk} = - 320 k^2 k'^2 \sqrt{\mu} + 20 \sqrt{\mu'} - 5 \sqrt{\mu''}, \\ 400 k^2 k'^4 (1 - 2k^2) \dfrac{d^2 \sqrt{\mu}}{dk^2} = - 64 k^2 k'^2 (1 + 3k^2) \sqrt{\mu} - 4(3 - 11k^2) \sqrt{\mu'} - 5k^2 \sqrt{\mu''}, \end{cases}$$

e le espressioni $\sqrt{\mu'}$, $\sqrt{\mu''}$ hanno la proprietà enunciata da Jacobi. Evidentemente la stessa proprietà avrà luogo per tutte le espressioni della forma

$$(22) \qquad \sqrt{M} = p\sqrt{\mu} + q\sqrt{\mu'} + r\sqrt{\mu''},$$

nella quale le p, q, r sono funzioni di k.

Importa qui di notare, per quanto si vedrà in seguito, che il coefficiente del secondo termine della equazione in M risulta eguale al prodotto di un coefficiente numerico (— 10) per la espressione

$$(23) \qquad p^2 - \tfrac{1}{4} m (q^2 + 2pr + 8qr),$$

posto $m = 4^4 k^2 k'^2$. Ora questa evidentemente si annulla: 1° se $p = q = 0$; 2° se $p = 64 k^2 k'^2$, $q = - 8k^2$, $r = 1$; 3° se $p = - 64 k^2 k'^2$, $q = 8k'^2$, $r = - 1$.

Supponiamo il primo caso; se $r^2 = \dfrac{4}{m}$, si avrà:

$$M = - (\mu - 1)^3 (\mu - 5),$$

e l'equazione in M sarà la

$$M^6 - 10 m^2 M^3 - m^3 (16 - m) M + 5 m^4 = 0,$$

la quale, posta a confronto colla generale (20), dà per a, b, c i valori

$$(24) \qquad a = 0, \qquad b = - 4^8 k^4 k'^4, \qquad c = 4^{13} k^6 k'^6 (1 - 16 k^2 k'^2).$$

La trasformazione del quinto ordine delle funzioni ellittiche presenta quindi due serie di equazioni, di cui le radici hanno la proprietà indicata da Jacobi; esse ponno nell'uno e nell'altro caso esprimersi colla (20), ma in un caso il coefficiente $b = 0$, nell'altro $a = 0$. È notevole che in ambedue i casi i coefficienti letterali di quelle equazioni si ponno ridurre ad uno solo; infatti, se $b = 0$, posto $z - a = ay$, si ha

la trasformata

$$y^6 - 4y^5 - 4\frac{c}{a^5}y - 4\frac{c}{a^5} = 0,$$

e se $a = 0$, ponendo $z = y\sqrt[3]{b}$, si ottiene la

$$y^6 + 10y^3 - 4\frac{c}{b^{\frac{5}{3}}}y + 5 = 0.$$

5. Posto

$$\gamma_s = \sqrt{k}\cdot\frac{\operatorname{cn} 2s\omega}{\operatorname{dn} 2s\omega},$$

si hanno le due formole di trasformazione

$$B\sqrt{k - x^2}\prod(\gamma_s^2 - x^2) - \sqrt{\lambda - y^2}\,V(x) = 0,$$

$$B\sqrt{1 - kx^2}\prod(1 - \gamma_s^2 x^2) - \sqrt{1 - \lambda y^2}\,V(x) = 0.$$

Ora se nella (1) e nell'ultima di queste si fa $u = K$, si ottengono le

$$\sqrt{\lambda} = \frac{U(\sqrt{k})}{V(\sqrt{k})}, \qquad \lambda' = \frac{k'^n}{\prod \operatorname{dn}^2 2s\omega}\cdot\frac{B}{V(\sqrt{k})},$$

ma dal valore (6) di V si ha:

$$V(\sqrt{k}) = B\prod \operatorname{dn}^2 2s\omega;$$

quindi:

$$V(\sqrt{k}) = \frac{k'^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda'}}B, \qquad U(\sqrt{k}) = k'^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}.B,$$

le quali, rammentando il valore di B, conducono alle

$$(25)\quad \begin{cases} k'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\mu} = B + B_1 k + B_2 k^2 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-1}{2}}, \\ k'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\mu\frac{\lambda}{k}} = Bk^{\frac{n-1}{2}} + B_1 k^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + B_{\frac{n-3}{2}} k + B_{\frac{n-1}{2}}. \end{cases}$$

Le derivate di $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\mu\frac{\lambda}{k}}$, e di altre espressioni analoghe, prese rispetto ad α od a k, si potranno evidentemente esprimere, per la proprietà dei coefficienti B contenuta nella equazione (7), siccome funzioni lineari dei coefficienti stessi; per esempio

si avrà:

$$n k'^{\frac{n-1}{2}} \frac{d\sqrt{\mu}}{dk} = B_1 + 2B_2 k + 3B_3 k^2 + \cdots + \frac{n-1}{2} B_{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n-3}{2}};$$

ed in conseguenza sussisteranno i due seguenti teoremi:

1. *I coefficienti* $B, B_1, B_2, \ldots$ *sono esprimibili per funzioni lineari della radice quadrata del moltiplicatore e delle sue derivate rispetto al modulo fino a quella dell'ordine* $\frac{n-1}{2}$.

2. *La radice quadrata del moltiplicatore soddisfa ad un'equazione differenziale lineare dell'ordine* $\frac{n+1}{2}$.

Nella trasformazione del terzo ordine si avranno le

$$B = k'\sqrt{\mu} - 3kk'\frac{d\sqrt{\mu}}{dk}, \qquad B_1 = 3k'\frac{d\sqrt{\mu}}{dk},$$

e la radice quadrata del moltiplicatore soddisferà all'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$3kk'^2\frac{d^2\sqrt{\mu}}{dk^2} + (1 - 5k^2)\frac{d\sqrt{\mu}}{dk} + k\sqrt{\mu} = 0,$$

la quale, posto $k^2 = \xi$, si trasforma nell'equazione ipergeometrica

$$\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\xi^2} + \frac{2}{3}\frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}\frac{d\sqrt{\mu}}{d\xi} + \frac{\sqrt{\mu}}{12\xi(1-\xi)} = 0. \tag{26}$$

Per $n = 5$ si hanno le

$$(27)\quad \begin{cases} 6B = 2(2k^2+3)\sqrt{\mu} - 5k(5k^2+3)\dfrac{d\sqrt{\mu}}{dk} + 25k^2k'^2\dfrac{d^2\sqrt{\mu}}{dk^2}, \\[2ex] 3B_1 = -10k\sqrt{\mu} + 40k^2\dfrac{d\sqrt{\mu}}{dk} - 25kk'^2\dfrac{d^2\sqrt{\mu}}{dk^2}, \\[2ex] 6B_2 = 10\sqrt{\mu} + \dfrac{5}{k}(3 - 11k^2)\dfrac{d\sqrt{\mu}}{dk} + 25k'^2\dfrac{d^2\sqrt{\mu}}{dk^2}, \end{cases}$$

dalle quali, per le (21), si deduce essere

$$\sqrt{\mu'} = 4k(2Bk + B_1), \qquad \sqrt{\mu''} = -32k^2(B + B_1 k + B_2);$$

ed infine, posto $k^2 = \xi$, si ha l'equazione differenziale lineare del terzo ordine

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^3\sqrt{\mu}}{d\xi^3} + 2\frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\xi^2} \\ &\qquad + \frac{1}{25}\frac{49\xi^2-49\xi+4}{\xi^2(1-\xi)^2}\frac{d\sqrt{\mu}}{d\xi} + \frac{1}{50}\frac{1-2\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}\sqrt{\mu} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si osservi che per le relazioni (25) e per essere

$$B = \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}},$$

questi ultimi valori di $\sqrt{\mu'}$, $\sqrt{\mu''}$ conducono alle

$$\sqrt{\mu''} = -32k^2k'^2\left(\sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}} + \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}}\right),$$

$$64k^2k'^2\sqrt{\mu} - 8k^2\sqrt{\mu'} + \sqrt{\mu''} = 32k^2(1-2k^2)\left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}}\right),$$

$$-64k^2k'^2\sqrt{\mu} + 8k'^2\sqrt{\mu'} - \sqrt{\mu''} = 32k'^2(1-2k^2)\left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}}\right),$$

i primi membri delle quali sono i valori (22) di $\sqrt{M}$, nei quali si sono sostituiti per p, q, r i valori che annullano l'espressione (23). Per le equazioni, di cui le radici sono le

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}} + \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}}\right)^2, \quad \left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}}\right)^2, \quad \left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}}\right)^2,$$

sarà quindi il coefficiente $a = 0$.

Per ottenere il tipo della equazione differenziale del terzo ordine corrispondente a queste ultime equazioni, si osservi che, posto

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}} + \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}},$$

sarà per le relazioni superiori

$$B + B_1 k + B_2 = k'^2\sqrt{\tau},$$

e quindi per la proprietà della B si otterrà la

$$(29)\quad \frac{d^3\sqrt{\tau}}{d\xi^3} + 3\frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}\frac{d^2\sqrt{\tau}}{d\xi^2} + \frac{3}{25}\frac{8-53\xi+53\xi^2}{\xi^2(1-\xi)^2}\frac{d\sqrt{\tau}}{d\xi} - \frac{9}{50}\frac{1-2\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}\sqrt{\tau} = 0,$$

dove $\xi = k^2$; mentre per essere

$$\sqrt{M} = -4kk'\sqrt{\tau},$$

l'equazione in M calcolata sopra, darà per l'equazione in τ i valori

$$a = 0, \qquad b = -\frac{4^2}{k^2k'^2}, \qquad c = 4^3\frac{1 - 16k^2k'^2}{k^4k'^4}.$$

6. Posto

$$\Delta(x, k) = \sqrt{(k - x^2)(1 - kx^2)},$$

si ha per la (2) che

$$\frac{dy}{\Delta(y, \lambda)} = \mu\frac{dx}{\Delta(x, k)}.$$

Supponiamo che mediante due trasformazioni dello stesso ordine si ottengano le

$$(30) \qquad \frac{d\xi}{\Delta(\xi, h)} = p\frac{dx}{\Delta(x, k)}, \qquad \frac{d\eta}{\Delta(\eta, l)} = q\frac{dy}{\Delta(y, \lambda)},$$

si avrà altresì

$$\frac{d\eta}{\Delta(\eta, l)} = \nu\frac{d\xi}{\Delta(\xi, h)},$$

essendo

$$\nu = \frac{q}{p}\mu.$$

Se a quest'ultima corrisponde una trasformazione dell'n^{mo} ordine, sussisteranno, analogamente alle (25), le relazioni

$$h'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\nu} = C + C_1 h + C_2 h^2 + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}} h^{\frac{n-1}{2}},$$

$$h'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{l\nu}{h}} = Ch^{\frac{n-1}{2}} + C_1 h^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}},$$

nelle quali evidentemente le C, C_1, ... si dedurranno l'una dall'altra come le B, B_1, ...

Supponiamo in particolare che le trasformazioni corrispondenti alle equazioni (30) sieno del secondo ordine; si otterranno, come è noto, i valori di $\sqrt{\nu}$, $\sqrt{\nu_m}$ mutando q in q^2 nelle serie doppiamente infinite, che dànno i valori di $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\mu_m}$; vale a dire le radici quadrate degli $n + 1$ valori di ν soddisferanno $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari, che evidentemente si otterranno da quelle sussistenti per le $\sqrt{\mu}$, mutando in queste ultime

ε in ε^2. Sussiste cioè una seconda classe di equazioni dotate della proprietà indicata da JACOBI, per le quali si verificano le relazioni

$$(31) \qquad \sum_0^{n-1}{}_m \sqrt{\nu_m} = -\rho\sqrt{\rho n \nu}, \qquad \sum_0^{n-1}{}_m \varepsilon^{mr}\sqrt{\nu_m} = 0,$$

nella seconda delle quali r rappresenta un residuo quadratico di n, se $\frac{n-1}{2}$ è pari, ed un non residuo quadratico di n, se $\frac{n-1}{2}$ è dispari. La distinzione fra queste due classi di equazioni è dovuta al signor KRONECKER.

Una qualsivoglia delle diciotto trasformazioni del secondo ordine condurrà alla ricerca delle funzioni di μ, che soddisfano a queste ultime relazioni. Sieno, per esempio:

$$b = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad l = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}; \qquad p = 1 + k, \qquad q = 1 + \lambda;$$

si ha:

$$\frac{l\nu}{b} = \mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}},$$

e quindi le radici quadrate degli $n+1$ valori di $\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}}$ verificheranno le relazioni (31).

Abbiamo già dato più addietro al n° 1 le due equazioni di quarto e di sesto grado, alle quali soddisfano i valori di

$$v = \mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}};$$

osserviamo ora che, essendo per le equazioni (25), supposto $n = 3$,

$$k'\sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}} = Bk + B_1,$$

si avrà:

$$\sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}} = -\frac{1}{4k}[\mu^3 - 7\mu + 2(3 - 8k^2)]\sqrt{\mu},$$

da cui:

$$v = \frac{1}{4k}(\mu - 1)(\mu + 3),$$

la quale, ponendo

$$\varphi(\mu) = [\mu^3 - 5\mu + 8(1 - 2k^2)]\sqrt{\mu}, \qquad \psi(\mu) = (\mu^2 - 5)\sqrt{\mu},$$

dà per le equazioni di quarto grado in μ:

$$\sqrt{v} = \frac{1}{8k\sqrt{k}}[\varphi(\mu) + \psi(\mu)].$$

Così, essendo

$$\nu = \frac{1+\lambda}{1+k}\mu,$$

sarà

$$\nu = \frac{1}{4k(1+k)}[\mu^3 + \mu^2 + (4k-5)\mu + 3(1-4k^2)],$$

e

$$\sqrt{\nu} = \frac{1}{8k(1+k)}[(1+2k)\varphi(\mu) + \psi(\mu)],$$

cioè le funzioni $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$ soddisferanno le relazioni (31), e tutte le espressioni, dotate delle stesse proprietà, saranno funzioni lineari delle medesime.

Per $n = 5$ la seconda delle (25) dà pei valori (27):

$$- 64k^2(1-2k^2)\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}}$$

$$= \mu^5 - 9\mu^4 + 2(13+4k^2)\mu^3 - 2(17+20k^2)\mu^2 + 7(3+8k^2)\mu - 5(1-8k^2),$$

la quale, posto

$$\varphi(\mu) = (\mu^5 - 10\mu^4 + 35\mu^3 - 59\mu^2 + 48\mu - 15 + 4^4k^2k'^2)\sqrt{\mu},$$

$$\varphi_1(\mu) = (\mu^3 - 7\mu^2 + 11\mu - 5)\sqrt{\mu}, \qquad \varphi_2(\mu) = (\mu - 3)\sqrt{\mu},$$

conduce alla

$$\sqrt{v} = \frac{1}{32k(1-2k^2)}[\varphi(\mu) + \varphi_1(\mu) + 16k^2\varphi_2(\mu)],$$

cioè le tre funzioni $\varphi(\mu)$, $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$ soddisferanno le relazioni (31), e tutte le espressioni, che hanno la medesima proprietà, sono funzioni lineari di esse.

Si può da ultimo osservare, che a questi risultati conducono anche le espressioni corrispondenti alle considerate trasformazioni, cioè

$$\xi\sqrt{h} = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad \eta\sqrt{l} = \frac{2y}{1+y^2},$$

per le quali si ottengono facilmente i valori dei rapporti delle quantità C in funzione delle B.

Riassumendo, diremo che la trasformazione delle funzioni ellittiche presenta due classi di equazioni, di cui le radici quadrate delle radici verificano il teorema di Jacobi, e che appartengono alla prima classe quelle di cui le radici sono gli $n+1$ valori di

$$\mu, \quad \frac{\lambda\mu}{k}, \quad \frac{\lambda'\mu}{k'}, \quad \frac{\lambda\lambda'}{kk'}\mu^3, \quad \ldots$$

ed alla seconda le altre di cui le radici sono gli $n+1$ valori di

$$\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}}, \quad \mu\sqrt{\frac{\lambda'}{k'}}, \quad \frac{\lambda^2}{k^2}\mu^3\sqrt{\frac{\lambda'}{k'}}, \quad \frac{\lambda'^2}{k'^2}\mu^3\sqrt{\frac{\lambda}{k}}, \quad \ldots.$$

7. La quarta formola del § 376 del testo *), ossia la

$$\frac{2kk'K^3}{\pi^3} = q^{\frac{1}{2}}(1-q^{2m})^6,$$

dà luogo alla

$$\frac{2\lambda\lambda'\Lambda^3}{\pi^3} = q^{\frac{n}{2}}(1-q^{2mn})^6;$$

ma

$$\mu K = \rho n \Lambda, \qquad \text{essendo} \qquad \rho = (-1)^{\frac{n-1}{2}};$$

quindi:

$$B_{\frac{n-1}{2}} = \mu\sqrt{\mu\frac{\lambda\lambda'}{kk'}} = \rho^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}} \frac{q^{\frac{n}{4}}(1-q^{2mn})^3}{q^{\frac{1}{4}}(1-q^{2m})^3},$$

$$B^{\frac{1}{3}}_{\frac{n-1}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \frac{q^{\frac{n}{12}}(1-q^{2mn})}{q^{\frac{1}{12}}(1-q^{2m})}.$$

Posto dunque

$$B^{\frac{1}{3}}_{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{z}, \qquad z\sqrt{z} = \sqrt{Z},$$

si hanno le

$$\sqrt{z_\infty} = \frac{\sqrt{\rho n}}{S} q^{\frac{n}{12}}(1-q^{2mn}), \qquad \sqrt{z_s} = \frac{1}{S} q_s^{\frac{1}{12}}(1-q_s^{2m}),$$

$$\sqrt{Z_\infty} = \frac{\sqrt{\rho^3 n^3}}{S^3} q^{\frac{n}{4}}(1-q^{2mn})^3, \qquad \sqrt{Z_s} = \frac{1}{S^3} q_s^{\frac{1}{4}}(1-q_s^{2m})^3,$$

---

*) A. Cayley, *Trattato elementare delle funzioni ellittiche* (Traduzione di F. Brioschi), pag. 265.

nelle quali, come più addietro, $q_s = \varepsilon^s q^{\frac{1}{n}}$, e

$$S = q^{\frac{1}{12}}(1 - q^{2m}).$$

Richiamiamo ora le relazioni (6), (7) delle pagine 185, 186 dei *Fundamenta nova,* ossia le

$$1 - q^{2m} = \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g q^{3g^2 \pm g},$$

$$(1 - q^{2m})^3 = \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g (2g+1) q^{g^2+g},$$

per le quali:

$$S = \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g q^{\frac{(6g\pm 1)^2}{12}}, \qquad S^3 = \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g (2g+1) q^{\frac{(2g+1)^2}{4}}.$$

Si avranno così le espressioni seguenti:

$$\sqrt{\zeta_\infty} = \frac{\sqrt{\rho n}}{S} \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g q^{\frac{n(6g\pm 1)^2}{12}},$$

$$\sqrt{\zeta_s} = \frac{1}{S} \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g q_s^{\frac{(6g\pm 1)^2}{12}},$$

$$\sqrt{Z_\infty} = \frac{\sqrt{\rho^3 n^3}}{S^3} \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g (2g+1) q^{\frac{n(2g+1)^2}{4}},$$

$$\sqrt{Z_s} = \frac{1}{S^3} \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g (2g+1) q_s^{\frac{(2g+1)^2}{4}}.$$

Indicando ora con r un numero, che soddisfi alla congruenza $4r \equiv 1 \pmod{n}$ e quindi sia un residuo quadratico di n, essendo $\varepsilon^{\frac{s}{4}} = \varepsilon^{rs}$, si ha tosto che la espressione di $\sqrt{Z_s}$, nella quale si ponga $gn + t$ in luogo di g, e $t = 0, 1, 2, \ldots n-1$, conduce alla

$$\sqrt{Z_s} = A_0 + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_m \varepsilon^{r_m s} A_m,$$

nella quale r_m è residuo quadratico di n ed

$$A_0 = \frac{\rho n}{S^3} \sum_{0}^{\infty}{}_g (-1)^g (2g+1) q^{\frac{n(2g+1)^2}{4}},$$

per cui:

$$\sqrt{Z_\infty} = A_0 \sqrt{\rho n}.$$

Così, posto $12r \equiv 1 \pmod{n}$, si avrà:

$$\sqrt{z_s} = a_0 + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}_m \varepsilon^{r_m s} a_m,$$

essendo r_m residuo quadratico o non residuo quadratico di n, secondo che lo è, o non lo è, il numero r che soddisfa la congruenza precedente. Infine sarà

$$\sqrt{z_\infty} = \rho a_0 \sqrt{\rho n}, \quad \text{oppure} \quad \sqrt{z_\infty} = -\rho a_0 \sqrt{\rho n},$$

secondo che n sarà della forma $6p + 1$ o della forma $6p - 1$.

Se $n = 5$, si hanno le

$$\sqrt{Z_\infty} = A_0 \sqrt{5}, \qquad \sqrt{z_\infty} = -a_0 \sqrt{5},$$

$$\sqrt{Z_s} = A_0 + \varepsilon^s A_1 + \varepsilon^{4s} A_2, \qquad \sqrt{z_s} = a_0 + \varepsilon^{2s} a_1 + \varepsilon^{3s} a_2;$$

ma $\sqrt{Z} = z\sqrt{z}$, quindi:

$$A_0 = -5a_0^3, \qquad A_0 = a_0^3 + 6a_0 a_1 a_2,$$

dalle quali

$$a_0^2 + a_1 a_2 = 0.$$

La equazione di cui le radici sono le $z_\infty, z_0, \dots z_4$ avrà dunque il coefficiente $a = 0$.

Capitolo Secondo.

Le proprietà delle equazioni Jacobiane del quarto e del sesto grado *).

1. Per quanto si è dimostrato nel precedente capitolo le radici delle equazioni (19), (20) del quarto e del sesto grado hanno la proprietà enunciata da Jacobi pei valori del moltiplicatore nelle trasformazioni del terzo e del quinto ordine; perciò indicheremo quelle equazioni generali colla denominazione di *equazioni Jacobiane*.

---

*) Questo capitolo comprende i risultati dei due seguenti lavori: 1° *Sur une classe d'équations du quatrième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVII (1863), pp. 106-108]; 2° *La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado* [LXVII: t. II, pp. 79-89].

Le radici dell'equazioni del quarto grado

$$f(z) = z^4 - 6az^2 + bz - 3a^2 = 0$$

soddisfano cioè alle due relazioni:

$$(1) \qquad \sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} = -\sqrt{-3z}, \qquad \sqrt{z_0} + \varepsilon\sqrt{z_1} + \varepsilon^2\sqrt{z_2} = 0,$$

e posto

$$\sqrt{z} = a_0\sqrt{-3}, \qquad \sqrt{z_0} + \varepsilon^2\sqrt{z_1} + \varepsilon\sqrt{z_2} = 3a_1,$$

si hanno le

$$a = a_0(a_0^3 + a_1^3), \qquad b = 8a_0^6 - 20a_0^3a_1^3 - a_1^6.$$

Ora indicando con $f'(z)$ la derivata rispetto a z del primo membro dell'equazione $f(z) = 0$, si ottiene facilmente la

$$z^3 - 7az + \frac{3}{4}b = -\frac{3}{4}\frac{64a^3 - b^2}{f'(z)},$$

per la quale la equazione $f(z) = 0$ dà

$$\frac{3}{2}(64a^3 - b^2)\frac{d\sqrt{z}}{db} = \left(z^3 - 7az + \frac{3}{4}b\right)\sqrt{z}.$$

La espressione del secondo membro soddisferà quindi a due relazioni analoghe alle (1), ed in generale, posto

$$\sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q(z^3 - 7az + b)\sqrt{z},$$

essendo p, q funzioni di a, b, si avranno le

$$\sqrt{Z_0} + \sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} = -\sqrt{-3Z}, \quad \sqrt{Z_0} + \varepsilon\sqrt{Z_1} + \varepsilon^2\sqrt{Z_2} = 0,$$

e le Z, Z_0, Z_1, Z_2 saranno radici dell'equazione del quarto grado

$$Z^4 - 6AZ^2 + BZ - 3A^2 = 0,$$

nella quale le A, B sono funzioni di a, b.

Dai valori delle $\sqrt{z}$, $\sqrt{z_0}$, ... in funzione di a_0, a_1 deducesi facilmente che le due espressioni

$$(z^3 - 5az + b)\sqrt{z}, \qquad (z^2 - 5a)\sqrt{z},$$

ed in generale la

$$\sqrt{Z} = p(z^3 - 5az + b)\sqrt{z} + q(z^2 - 5a)\sqrt{z},$$

dove p, q sono funzioni di a, b, soddisfano alle altre due relazioni:

$$\sqrt{Z_0} + \sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} = \sqrt{-3Z}, \qquad \sqrt{Z_0} + \varepsilon^2\sqrt{Z_1} + \varepsilon\sqrt{Z_2} = 0.$$

Questi risultati trovano diretta applicazione in una nota quistione geometrica o nella teorica delle forme ternarie cubiche *).

Se nella equazione (1) si pone $z = y\sqrt{a}$ e si divide l'equazione per a^2, si ottiene la

$$y^4 - 6y^2 + 8my - 3 = 0,$$

posto $8m = \dfrac{b}{a\sqrt{a}}$. Da questa si deduce, come superiormente, che

$$12(1 - m^2)\frac{d\sqrt{y}}{dm} = (y^3 - 7y + 6m)\sqrt{y},$$

e derivando nuovamente si giunge alla equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$12(1 - m^2)\frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} - 16m\frac{d\sqrt{y}}{dm} + \sqrt{y} = 0,$$

la quale coincide colla (26) del Capitolo I, se si pone $m = 1 - 2\xi$ ed $y = \mu$.

2. La equazione generale Jacobiana del sesto grado è la

$$(2)\quad (z - a)^6 - 4a(z - a)^5 + 10b(z - a)^3 - 4c(z - a) + 5b^2 - 4ac = 0;$$

le sue radici soddisfano alle tre relazioni

$$(3)\quad \begin{cases} \sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} + \sqrt{z_4} = \sqrt{5z}, \\ \sqrt{z_0} + \varepsilon^2\sqrt{z_1} + \varepsilon^4\sqrt{z_2} + \varepsilon\sqrt{z_3} + \varepsilon^3\sqrt{z_4} = 0, \\ \sqrt{z_0} + \varepsilon^3\sqrt{z_1} + \varepsilon\sqrt{z_2} + \varepsilon^4\sqrt{z_3} + \varepsilon^2\sqrt{z_4} = 0, \end{cases}$$

ed i coefficienti a, b, c sono funzioni di tre quantità a_0, a_1, a_2 [equazioni (20) Capitolo I], date dalle

$$(4)\qquad \sqrt{z} = a_0\sqrt{5}, \quad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2 \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Osserviamo dapprima che pel valore del coefficiente a essendo

$$\frac{\partial a}{\partial a_0} = 2a_0, \qquad \frac{\partial a}{\partial a_1} = a_2, \qquad \frac{\partial a}{\partial a_2} = a_1,$$

*) Vedi la Nota dei « Comptes rendus » citata sopra, ed una Nota del sig. HERMITE: *Sur la résolution de l'équation du quatrième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 715-722].

se poniamo analogamente

$$\frac{\partial b}{\partial a_0} = 2 b_0, \qquad \frac{\partial b}{\partial a_1} = b_2, \qquad \frac{\partial b}{\partial a_2} = b_1,$$

$$\frac{1}{5}\frac{\partial c}{\partial a_0} = 2 c_0, \qquad \frac{1}{5}\frac{\partial c}{\partial a_1} = c_2, \qquad \frac{1}{5}\frac{\partial c}{\partial a_2} = c_1,$$

dalle relazioni (4) si deducono le

$$2\left(a_0 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial a} + b_0 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial b} + 5 c_0 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial c}\right) = \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial a_0} = 1,$$

$$a_2 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial a} + b_2 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial b} + 5 c_2 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial c} = \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial a_1} = \varepsilon^m,$$

$$a_1 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial a} + b_1 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial b} + 5 c_1 \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial c} = \frac{\partial \sqrt{z_m}}{\partial a_2} = \varepsilon^{4m},$$

le quali, moltiplicate ordinatamente prima per a_0, a_1, a_2, poi per b_0, b_1, b_2, infine per c_0, c_1, c_2 e sommate conducono alle

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{z} = a\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial a} + n\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial b} + 5m\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial c}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{z'} = n\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial a} + a'\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial b} + 5l\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial c}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{z''} = m\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial a} + l\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial b} + 5a''\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial c}, \end{cases}$$

per una qualunque delle radici z; essendo

$$(6)\qquad \sqrt{z'_m} = b_0 + \varepsilon^m b_1 + \varepsilon^{4m} b_2, \qquad \sqrt{z''_m} = c_0 + \varepsilon^m c_1 + \varepsilon^{4m} c_2,$$

ed

$$(7)\qquad \begin{cases} a_0^2 + a_1 a_2 = a, & 2b_0c_0 + b_1c_2 + b_2c_1 = 2l, \\ b_0^2 + b_1 b_2 = a', & 2c_0a_0 + c_1a_2 + c_2a_1 = 2m, \\ c_0^2 + c_1 c_2 = a'', & 2a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 = 2n. \end{cases}$$

Evidentemente le espressioni $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ soddisfano a relazioni analoghe alle (3) e potranno quindi dar luogo a due altre equazioni Jacobiane del sesto grado, di cui i

coefficienti saranno funzioni delle a, b, c; e lo stesso potrà dirsi della

$$(8) \qquad \sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\sqrt{z'} + r\sqrt{z''},$$

supposte le p, q, r funzioni delle a, b, c.

I valori delle espressioni (7) a', a'', ... si ottengono assai facilmente, e sono

$$a' = 8a^2b + c, \quad a'' = b(4ac - 3b^2), \quad l = a(4ac - b^2), \quad m = c, \quad n = 3b.$$

Quindi, posto

$$h = \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & a' & l \\ m & l & a'' \end{vmatrix},$$

ossia

$$(9) \qquad h = 27b^5 - c^3 - 25a^3b^4 + 40a^4b^2c + 20a^2bc^2 - 45ab^3c - 16a^5c^2,$$

si hanno le

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2h\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial a} &= e\sqrt{z} + \varphi\sqrt{z'} + f\sqrt{z''} = P, \\ 2h\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b} &= \varphi\sqrt{z} + f\sqrt{z'} + \varepsilon\sqrt{z''} = Q, \\ 10h\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c} &= f\sqrt{z} + \varepsilon\sqrt{z'} + g\sqrt{z''} = R, \end{aligned} \right.$$

essendo

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & e = 40a^3b^2c + 4abc^2 - 25a^2b^4 - 3b^3c - 16a^4c^2, \\ & f = 4a^2bc - 3ab^3 - c^2, \quad g = 8a^3b + ac - 9b^2, \\ & \varepsilon = 3bc - 4a^3c + a^2b^2, \quad \varphi = 4a^2c^2 - 13ab^2c + 9b^4. \end{aligned} \right.$$

I valori di $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ in funzione di $\sqrt{z}$ si deducono dalle (6) per mezzo dei valori dei coefficienti a, b, c e dell'equazione di sesto grado. Essi sono:

$$\begin{aligned} 2(a^3 - b)\sqrt{z'} = (z^5 - 10az^4 + 35a^2z^3 - 61a^3z^2 + 11bz^2 + 60a^4z \\ - 35abz - 25a^5 + 29a^2b - 4c)\sqrt{z}, \end{aligned}$$

$$2\sqrt{z''} = 2a^2\sqrt{z'} + (z^4 - 9az^3 + 27a^2z^2 - 39a^3z + 9bz + 20a^4 - 14ab)\sqrt{z},$$

e dai medesimi, quando si ponga

$$y = z - a,$$

e si indichino con $f_1, f_2, \ldots$ le funzioni

$$f_1 = y - 4a, \quad f_2 = yf_1, \quad f_3 = y^2 f_1 + 10b, \quad f_4 = yf_3, \quad f_5 = y^2 f_3 - 4c,$$

si otterranno le

$$(12) \quad \begin{cases} z = 5a + f_1, \\ z' = c - 10abf_1 - 5bf_2 - 4a^2 f_3 + af_4 - f_5, \\ z'' = -2bcf_1 - b^2 f_3 + cf_4, \\ 2\sqrt{z'z''} = -(4ac + 5b^2)f_1 - 2cf_2 - 4abf_3 + 3bf_4, \\ 2\sqrt{zz''} = 4c - bf_2 + f_5, \\ 2\sqrt{zz'} = 15b - 2af_2 - f_3. \end{cases}$$

Queste ultime, osservando essere

$$\sum f_1 = -20a, \quad \sum f_2 = 0, \quad \sum f_3 = 30b, \quad \sum f_4 = 0, \quad \sum f_5 = -4c,$$

dove le sommatorie si estendono alle radici dell'equazione del sesto grado, conducono dapprima per la (8) alla

$$\sum Z = 10A,$$

essendo

$$A = ap^2 + a'q^2 + a''r^2 + 2lqr + 2mrp + 2npq;$$

poi, supposto $Y = Z - A$, al seguente valore di Y:

$$Y = t + t_0 f_1 + t_1 f_2 + t_2 f_3 + t_3 f_4 + t_4 f_5,$$

essendo le $t, t_0, \ldots t_4$ funzioni delle a, b, c, p, q, r. Per mezzo di questa formola di trasformazione si passa da una ad un'altra qualsivoglia equazione Jacobiana del sesto grado. Per esempio, supponendo nella (2) $b = 0$, se vuolsi ottenere una trasformazione nella quale sia invece $A = 0$, risultando in questo caso

$$A = ap^2 + cq^2 + 8a^2cqr + 2cpr,$$

si avrà $A = 0$ ponendo $p = q = 0$; se inoltre si suppone $cr^2 = 1$, sarà

$$Y = f_4 = y^4 - 4ay^3$$

la formola di trasformazione, e si otterrà la equazione

$$Y^6 + 10BY^3 - 4CY + 5B^2 = 0,$$

nella quale

$$B = 4^2 a^2 c^2, \qquad C = 4^3 c^3 (c + 4 a^5).$$

3. Dalle relazioni (12) si ottengono, avuto riguardo alle (10), i valori delle derivate di $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ rispetto alle a, b, c. Questi valori espressi in funzione delle a, b, c stesse e dei trinomî P, Q, R [equazioni (10)] sono i seguenti:

$$2b\frac{\partial\sqrt{z'}}{\partial a} = 16abQ + (12ac - 5b^2)R, \qquad 2b\frac{\partial\sqrt{z''}}{\partial a} = 4(ac - 33b^2)Q - 41bcR,$$

$$2b\frac{\partial\sqrt{z'}}{\partial b} = 5P + 8a^2Q, \qquad 2b\frac{\partial\sqrt{z''}}{\partial b} = 41abQ + (4ac - 9b^2)R,$$

$$10b\frac{\partial\sqrt{z'}}{\partial c} = 5Q + 8a^2R, \qquad 10b\frac{\partial\sqrt{z''}}{\partial c} = 9P + 32a^2Q + 65abR.$$

Questi risultati conducono tosto alle tre relazioni

$$10\left(b\frac{\partial P}{\partial c} - P\frac{\partial b}{\partial c}\right) = \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R,$$

$$10\left(b\frac{\partial Q}{\partial c} - Q\frac{\partial b}{\partial c}\right) = \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R,$$

$$10\left(b\frac{\partial R}{\partial c} - R\frac{\partial b}{\partial c}\right) = \alpha_3 P + \beta_3 Q + \gamma_3 R,$$

nelle quali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ sono le seguenti funzioni di a, b, c:

$$\alpha_1 = -f, \quad \beta_1 = -(5\varphi + 8a^2 f), \quad \gamma_1 = -(9e + 32a^2\varphi - 25abf),$$

$$\alpha_2 = -\varepsilon, \quad \beta_2 = -(5f + 8a^2\varepsilon), \quad \gamma_2 = -(9\varphi + 32a^2 f - 25ab\varepsilon),$$

$$\alpha_3 = -g, \quad \beta_3 = -(5\varepsilon + 8a^2 g), \quad \gamma_3 = -(9f + 32a^2\varepsilon - 25abg),$$

e le φ, f ... hanno i valori (11). Ora per l'ultima delle (10) essendo

$$10b\frac{\partial^2\sqrt{z}}{\partial c^2} + 10\frac{\partial b}{\partial c}\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c} = \frac{\partial R}{\partial c},$$

si avrà

$$10^2 b^2\frac{\partial^2\sqrt{z}}{\partial c^2} = \alpha_3 P + \beta_3 Q + \gamma_3 R.$$

Così, posto

$$u = 5(121 a^2 bc - 144 ab^3 + 128 a^4 b^2 - 96 a^5 c - 9c^2),$$

$$\alpha = -15a, \quad \beta = 15(8a^3 - 11b), \quad \gamma = 3(512a^5 - 395a^2 b + 78c),$$

si giunge con facile calcolazione alla

$$10^2 b\left(10b\frac{\partial^3 \sqrt{z}}{\partial c^3} + u\frac{\partial^2 \sqrt{z}}{\partial c^2}\right) = \alpha P + \beta Q + \gamma R,$$

e quindi, osservando essere

$$b\sqrt{z} = aP + nQ + mR,$$

dalla eliminazione delle P, Q, R si otterrà l'equazione differenziale lineare del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} 10^2\left(10b\dfrac{\partial^3 \sqrt{z}}{\partial c^3} + u\dfrac{\partial^2 \sqrt{z}}{\partial c^2}\right) & \alpha & \beta & \gamma \\ 10^2 b\dfrac{\partial^2 \sqrt{z}}{\partial c^2} & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 10\dfrac{\partial \sqrt{z}}{\partial c} & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{z} & a & n & m \end{vmatrix} = 0.$$

Supponiamo $a = 0$, si ha $h = 27b^5 - c^3$, ossia

$$h = \frac{c^3}{t}(1-t), \quad \text{posto} \quad c^3 = 27b^5 t,$$

e l'equazione superiore si trasforma nella

$$\frac{d^3\sqrt{z}}{dt^3} + \frac{1}{2}\frac{4-7t}{t(1-t)}\frac{d^2\sqrt{z}}{dt^2} + \frac{1}{900}\frac{200-1389t}{t^2(1-t)}\frac{d\sqrt{z}}{dt} + \frac{11}{5400}\frac{\sqrt{z}}{t^2(1-t)} = 0,$$

la quale, allorquando si faccia

$$\sqrt{z} = (1-t)w,$$

diventa la

$$\frac{d^3 w}{dt^3} + 3p\frac{d^2 w}{dt^2} + \left(\frac{dp}{dt} + 2p^2 + 4q\right)\frac{dw}{dt} + 2\left(2pq + \frac{dq}{dt}\right)w = 0,$$

essendo

$$p = \frac{1}{6}\frac{4-13t}{t(1-t)}, \qquad q = -\frac{29.41}{3600}\cdot\frac{1}{t(1-t)};$$

sarà cioè w esprimibile per mezzo di due serie ipergeometriche che soddisfino la equazione

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + p\frac{dw}{dt} + qw = 0.$$

4. Dividendo i termini del primo membro della equazione (20) del Capitolo I per

$$(z - a)^6 (5b^2 - 4ac),$$

e ponendo

$$\xi - \alpha = \frac{1}{z - a}, \quad \alpha = \frac{c}{5b^2 - 4ac}, \quad \beta = \frac{b}{5b^2 - 4ac}, \quad \gamma = \frac{a}{5b^2 - 4ac},$$

per cui

$$5\beta^2 - 4\alpha\gamma = \frac{1}{5b^2 - 4ac},$$

la equazione stessa (20) si trasforma nella

$$(13)\quad (\xi - \alpha)^6 - 4\alpha(\xi - \alpha)^5 + 10\beta(\xi - \alpha)^3 - 4\gamma(\xi - \alpha) + 5\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,$$

equazione della identica forma di quella da cui siamo partiti. Ora, essendo pel valore di z_m

$$z_m - a = a_1 a_2 + 2\varepsilon^m a_0 a_1 + \varepsilon^{2m} a_1^2 + \varepsilon^{3m} a_2^2 + 2\varepsilon^{4m} a_0 a_2,$$

se si pone

$$\xi_m - \alpha = h_0 + \varepsilon^m h_1 + \varepsilon^{2m} h_2 + \varepsilon^{3m} h_3 + \varepsilon^{4m} h_4,$$

e si moltiplicano queste equazioni membro per membro, si otterranno cinque equazioni, dalle quali si possono dedurre i valori di

$$h_0,\ h_1,\ \ldots\ h_4.$$

Introducendo le denominazioni

$$(14)\quad \begin{cases} C_0 = -a_1(4a_0^2 - a_1 a_2), & C_1 = 2a_0 a_1^2 - a_2^3, \\ C_3 = a_2(4a_0^2 - a_1 a_2), & C_2 = -(2a_0 a_2^2 - a_1^3), \end{cases}$$

da quattro fra quelle equazioni si deducono le

$$(15)\quad \begin{cases} h_0 C_2 + h_1 C_1 = 0, & h_0 C_0 = h_2 C_3 + h_4 C_1, \\ h_2 C_2 + h_3 C_1 = 0, & h_1 C_0 = h_3 C_3 + h_0 C_1, \end{cases}$$

le quali dimostrano dover essere

$$h_0 h_3 = h_1 h_2, \quad h_0^2 = h_1 h_4, \quad \text{e quindi} \quad h_0 h_2 = h_3 h_4.$$

Queste relazioni sono soddisfatte ponendo

$$h_0 = \alpha_1\alpha_2, \quad h_1 = \alpha_2^2, \quad h_2 = 2\alpha_0\alpha_1, \quad h_3 = 2\alpha_0\alpha_2, \quad h_4 = \alpha_1^2,$$

i quali valori sostituiti in quello di ξ_m dànno:

$$\xi_m - \alpha = (\alpha_0 + \varepsilon^{2m}\alpha_1 + \varepsilon^{3m}\alpha_2)^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1\alpha_2).$$

Sostituendo gli stessi valori nelle relazioni (15) si ottengono le due

$$\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1 = 0, \qquad 2\alpha_0 C_3 = \alpha_2 C_0 - \alpha_1 C_1,$$

dalle quali, indicando con ρ una quantità a determinarsi, si deducono le

$$\alpha_1 = \rho C_1, \qquad \alpha_2 = -\rho C_2, \qquad 2\alpha_0 C_3 = -\rho(C_0 C_2 + C_1^2);$$

ed osservando che si ha identicamente

$$C_0^2 C_2 + C_1^2 C_0 + C_2^2 C_3 + C_3^2 C_1 = 0, \tag{16}$$

sarà:

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2}\rho\frac{C_0 C_2 + C_1^2}{C_3} = \frac{1}{2}\rho\frac{C_1 C_3 + C_2^2}{C_0}.$$

Per determinare il valore di ρ faremo uso della quinta fra le equazioni sopra indicate, dalla quale, sostituendo per $h_0, h_1, \ldots$ i valori superiori, deducesi la

$$(4a_0^2 - a_1 a_2)^2 = \rho^2(5b^2 - 4ac),$$

purchè si noti essere

$$\left\{\begin{aligned} C_0^3 C_1 + C_1^3 C_3 + C_2^3 C_0 + C_3^3 C_2 + 3\, C_0 C_1 C_2 C_3 &= 4ac - 5b^2, \\ C_0 C_3 + C_1 C_2 &= -2b. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Si ha così:

$$\rho = -\frac{C_0}{a_1\sqrt{5b^2 - 4ac}} = \frac{C_3}{a_2\sqrt{5b^2 - 4ac}},$$

e, per l'equazione identica

$$C_1^3 C_3 + C_2^3 C_0 + C_1^2 C_2^2 + 5\, C_0 C_1 C_2 C_3 = 4a_1 a_2 c,$$

si avrà:

$$\alpha_0^2 + \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{5b^2 - 4ac} = \alpha,$$

per la quale

$$\sqrt{\xi_m} = \alpha_0 + \varepsilon^{2m}\alpha_1 + \varepsilon^{3m}\alpha_2.$$

Le radici quadrate delle radici della equazione (13) soddisfano quindi alle tre relazioni lineari:

$$
(18) \qquad \begin{cases} \sqrt{\xi_0}+\sqrt{\xi_1}+\sqrt{\xi_2}+\sqrt{\xi_3}+\sqrt{\xi_4}=-\sqrt{5\xi}, \\ \sqrt{\xi_0}+\varepsilon\sqrt{\xi_1}+\varepsilon^2\sqrt{\xi_2}+\varepsilon^3\sqrt{\xi_3}+\varepsilon^4\sqrt{\xi_4}=0, \\ \sqrt{\xi_0}+\varepsilon^4\sqrt{\xi_1}+\varepsilon^3\sqrt{\xi_2}+\varepsilon^2\sqrt{\xi_3}+\varepsilon\sqrt{\xi_4}=0. \end{cases}
$$

Una qualsivoglia delle radici quadrate $\sqrt{\xi}$ si potrà esprimere in funzione della corrispondente $\sqrt{\chi}$, e si trova facilmente essere

$$
(19) \qquad \begin{cases} 2(a^3-b)\sqrt{5b^2-4ac}\,.\sqrt{\xi} \\ =(\chi^5-10a\chi^4+35a^2\chi^3-59a^3\chi^2+9b\chi^2+48a^4\chi-23ab\chi-15a^5+19a^2b-4c)\sqrt{\chi}, \end{cases}
$$

ed evidentemente si otterrà il valore di $\sqrt{\chi}$ in funzione di $\sqrt{\xi}$, permutando in quest'ultima le ξ, χ, scrivendo α, β, γ in luogo di a, b, c, e cambiando il segno del secondo membro.

Così, come dalla $\sqrt{\chi}$ si ottennero le $\sqrt{\chi'}$, $\sqrt{\chi''}$ si dedurranno dalla $\sqrt{\xi}$ le espressioni $\sqrt{\xi'}$, $\sqrt{\xi''}$; cioè, ponendo

$$
\alpha'=8\alpha^2\beta+\gamma, \quad \alpha''=\beta(4\alpha\gamma-3\beta^2), \quad \lambda=\alpha(4\alpha\gamma-\beta^2), \quad \mu=\gamma, \quad \nu=3\beta,
$$

si avranno le

$$
\frac{1}{2}\sqrt{\xi}=\alpha\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\beta}+5\mu\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\gamma},
$$

$$
\frac{1}{2}\sqrt{\xi'}=\nu\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\alpha}+\alpha'\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\beta}+5\lambda\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\gamma},
$$

$$
\frac{1}{2}\sqrt{\xi''}=\mu\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\alpha}+\lambda\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\beta}+5\alpha''\frac{\partial\sqrt{\xi}}{\partial\gamma},
$$

ed indicando per brevità con k la espressione (9), nel secondo membro della quale alle a, b, c siensi sostituite le α, β, γ, si avrà la relazione

$$
\frac{k}{(5\beta^2-4\alpha\gamma)^{\frac{5}{2}}}=\frac{h}{(5b^2-4ac)^{\frac{5}{2}}}.
$$

I valori delle $\sqrt{\xi'}$, $\sqrt{\xi''}$ in funzione di $\sqrt{\chi}$ si ottengono facilmente per mezzo di

queste ultime relazioni, ed indicando con $\Phi(\sqrt{z})$ il secondo membro della (19) e con $\Phi_1(\sqrt{z})$, $\Phi_2(\sqrt{z})$ i polinomi

$$\Phi_1(\sqrt{z}) = (z^3 - 7az^2 + 11a^2z - 5a^3 + 7b)\sqrt{z},$$
$$\Phi_2(\sqrt{z}) = (z - 3a)\sqrt{z},$$

si hanno le relazioni seguenti:

$$2(a^3 - b)(5b^2 - 4ac)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\xi'} = -5ab\Phi(\sqrt{z}) + (a^3 - b)[5b\Phi_1(\sqrt{z}) + 4c\Phi_2(\sqrt{z})],$$

$$2(a^3 - b)(5b^2 - 4ac)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\xi''} = -2a^2\Phi(\sqrt{z}) + 2(a^3 - b)[a\Phi_1(\sqrt{z}) + b\Phi_2(\sqrt{z})],$$

ed i tre polinomî

$$\Phi(\sqrt{z}), \qquad \Phi_1(\sqrt{z}), \qquad \Phi_2(\sqrt{z})$$

soddisferanno quindi a tre relazioni analoghe alle (18).

5. Da quanto si è dimostrato al n° 2, appare manifesto che si può formare una equazione Jacobiana del sesto grado in Z di cui i coefficienti A, B, C contengono tre indeterminate p, q, r. La formola di trasformazione, colla quale si passa dalla equazione (2) a quest'ultima, è, siccome si è veduto allo stesso n° 2, la

$$Y = t + t_0 f_1 + t_1 f_2 + t_2 f_3 + t_3 f_4 + t_4 f_5, \tag{20}$$

essendo $Y = Z - A$ e le f_1, f_2, ... avendo i valori (12). Le t, t_0, ... sono funzioni del secondo grado in p, q, r, e cioè:

$$\left\{\begin{aligned} t + A &= -ct_4 + 5pw, \\ t_0 &= p^2 - 10abq^2 - 2bcr^2 - (4ac + 5b^2)qr, \\ t_1 &= -bt_4 - 2qw, \\ t_2 &= -4a^2q^2 - b^2r^2 - 4abqr - pq, \\ t_3 &= -at_4 + rw, \\ t_4 &= pr - q^2, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

posto per brevità

$$w = ap + 3bq + cr.$$

Si avrà quindi:

$$\sum Y = 4A = 6t - 20at_0 + 30bt_2 - 4ct_4, \tag{22}$$

dalla quale si deduce il valore di A trovato al n° 2, od anche il seguente:

$$Aa = w^2 + gq^2 - 2\varepsilon qr + fr^2, \tag{23}$$

dove le g, ε, f hanno i valori (11). Se da ultimo si osserva che il prodotto di due qualsivogliano funzioni f_1, f_2, ... si può esprimere in funzione lineare delle funzioni stesse, e si hanno le

$$(24)\quad \begin{cases} f_1^2 = f_2 - 4af_1, & f_1 f_2 = f_3 - 4af_2 - 10b, \\ f_2^2 = f_4 - 4af_3 - 10bf_1, & f_1 f_3 = f_4 - 4af_3, \\ f_3^2 = -4af_5 + 10bf_3 + 4cf_1 - d, & f_1 f_4 = f_5 - 4af_4 + 4c, \\ f_4^2 = 10bf_5 + 4cf_3 - df_2, & f_1 f_5 = -4af_5 - d, \\ f_5^2 = -4cf_5 - df_4, & f_4 f_5 = -df_3, \\ \quad f_2 f_3 = f_5 - 4af_4 + 4c, & \\ \quad f_2 f_4 = -4af_5 + 4cf_1 - d, & \\ \quad f_2 f_5 = -df_1, & \\ \quad f_3 f_4 = 10bf_4 + 4cf_2 - df_1, & \\ \quad f_3 f_5 = 10bf_5 - df_2, & \end{cases}$$

essendo $d = 5b^2 - 4ac$, si otterranno per Y^2, Y^3, ... espressioni analoghe a quella di Y e per mezzo di esse la ricerca dei valori generali dei coefficienti B, C non presenta difficoltà, salvo la lunghezza della calcolazione.

Importa però assai, per quanto avremo ad esporre in uno dei susseguenti capitoli, di considerare un po' più davvicino il caso nel quale $A = 0$. La formola (23) dà per la determinazione del rapporto di due fra le p, q, r la

$$w^2 + gq^2 - 2\varepsilon qr + fr^2 = 0,$$

dalla quale, supponendo

$$w = 0, \qquad r = g,$$

si deducono le

$$q = \varepsilon + \delta, \qquad p = f - \frac{n}{a}\delta,$$

essendo come al n° 2

$$n = 3b \qquad \text{e} \qquad \delta = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - fg} = \pm\sqrt{-ah}.$$

Le tre prime relazioni (21) e la (22) diventano quindi:

$$t = -ct_4, \quad t_1 = -bt_4, \quad t_3 = -at_4,$$

$$2at_0 - 3bt_2 + ct_4 = 0,$$

e per esse il valore (20) di Y si semplifica come segue

$$2aY = uP + vQ, \tag{25}$$

posto

$$\left\{\begin{aligned} P &= 2af_3 + 3bf_1, \\ Q &= 2af_5 - 2a^2f_4 - 2abf_2 - cf_1 - 2ac, \\ t_2 &= u, \quad t_4 = v. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Si noti che queste due ultime espressioni dànno le

$$\sum P = 0, \qquad \sum Q = 0,$$

e quindi $\sum Y = 0$ indipendentemente dai valori di u e di v. Questi ultimi valori sono:

$$\left\{\begin{aligned} u &= 2(4a^3 - n)b - \frac{\delta}{a}[4a^2(2a\varepsilon + ng) - (2n\varepsilon + a^2g)], \\ v &= 2ab - \frac{\delta}{a}(2a\varepsilon + ng). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Sostituendo i valori superiori di p, q, r nella (8) si ottiene:

$$\sqrt{Z} = f\sqrt{z} + \varepsilon\sqrt{z'} + g\sqrt{z''} - \frac{\delta}{a}(n\sqrt{z} - a\sqrt{z'}), \tag{28}$$

o per l'ultima delle (10) e per le prime due (5):

$$\sqrt{Z} = \frac{2\delta}{a}\left[g\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b} - 5(\varepsilon + \delta)\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c}\right].$$

Osserviamo ora che, indicando con $f(z)$ il primo membro della equazione (2), si hanno le

$$f'(z)\frac{\partial z}{\partial b} = -10[(z-a)^3 + b], \quad f'(z)\frac{\partial z}{\partial c} = 4z,$$

quindi:

$$\sqrt{Z} = -\frac{10\delta}{a\sqrt{z}}\cdot\frac{1}{f'(z)}[gy^3 + 2(\varepsilon+\delta)y + 2a(\varepsilon+\delta) + bg], \tag{29}$$

essendo, come antecedentemente,

$$y = z - a \quad \text{ed} \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz}.$$

Quest'ultima conduce facilmente alla determinazione del valore di B. Infatti, ponendo

$$U = -y[gy^2 + 2(\varepsilon + \delta)],$$

$$\mu = bg + 2a(\varepsilon + \delta),$$

considerando essere

$$\prod \sqrt{Z} = -B\sqrt{5}, \qquad \prod \sqrt{z} = (a^3 - b)\sqrt{5},$$

si ottiene la

$$B = 2^6 . 5^5 \frac{b^3}{a^3(a^3 - b)} \frac{\prod(\mu - U)}{\prod f'(z)}, \tag{30}$$

e la ricerca è ridotta a quella della trasformata in U dell'equazione in y.

Se ora si osservi essere

$$\prod f'(z) = -4^6 . 5^5 b^2,$$

$$\prod(\mu - U) = 4^3(a^3 - b)b^2(\delta W - V),$$

nella seconda delle quali sono

$$V = 160a^3(a^3 - b)b + bg^3 + 6ag^2\varepsilon - 16a^2g\varepsilon\psi - 32a^3g^3,$$

$$W = 2a[40(a^3 - b)(2a\varepsilon - 3bg) + 8ag\psi - 25g^2],$$

le g, ε avendo i valori (11) e

$$\psi = 32a^5 - 35a^2b + 3c,$$

si avrà, sostituendo nella equazione (30), il valore relativamente semplice di

$$B = \frac{b^3}{a^3}(V - \delta W).$$

Indicando con B_1, B_2 i due valori di B corrispondenti al doppio segno di δ, si ha:

$$B_1 B_2 = \frac{b^6}{a^6}(V^2 + abW^2),$$

dalla quale con breve calcolazione si ottiene la

$$B_1 B_2 = \frac{g^6 h^6}{a^6}(128\, a^3 b - 4 a c + b^2)\,.$$

Questo risultato, che dimostra il nesso fra il caso particolare qui considerato e le interessanti ricerche del professore KLEIN sull'icosaedro *), può dedursi più facilmente dalla originale espressione di $\sqrt{Z}$, giacchè indicando con Z_1, Z_2 i valori corrispondenti al doppio segno di δ, si ottiene facilmente la

$$\sqrt{Z_1 Z_2} = \frac{g h}{a}(5\, a - z)\,.$$

Quest'ultima relazione offre infine un modo abbastanza semplice per giungere al valore di C. Dalla medesima si ha infatti:

$$\frac{Z_1}{(5\, a - z)^2} = \frac{g^2 h^2}{a^2} \frac{1}{Z_2}\,,$$

e quindi

$$\sum \frac{Z_1}{(5\, a - z)^2} = \frac{4}{5} \frac{g^2 h^2}{a^2} \frac{C_2}{B_2^2}\,.$$

Ora, ponendo

$$\theta = 128\, a^3 b - 4 a c + b^2 = \tfrac{1}{5} f(5\, a),$$

$$\omega = 256\, a^5 + 120\, a^2 b - c = \tfrac{1}{4} f'(5\, a),$$

$$\rho = 4[\omega^2 - 25\, a(32\, a^3 + 3\, b)\theta],$$

si hanno le

$$\frac{5}{4}\theta^2 \sum \frac{z}{(5a - z)^2} = -\omega\theta + a\rho\,,$$

$$\frac{5}{4}\theta^2 \sum \frac{z'}{(5a - z)^2} = -25\,(28\, a^3 + 3\, b)\theta^2 + 4\, a(64\, a^3 + 25\, b)\omega\theta - (32\, a^2 b - c)\rho\,,$$

$$\frac{5}{4}\theta^2 \sum \frac{z''}{(5a - z)^2} = 5\, a(32\, a c - 7\, b^2)\theta^2 - 8(8\, a^3 c - 2\, a^2 b^2 + b c)\omega\theta + 2\, b(4 a c - b^2)\rho,$$

$$\frac{5}{4}\theta^2 \sum \frac{2\sqrt{z' z''}}{(5a - z)^2} = 5\,(68\, a^2 b - c)\theta^2 - (128\, a^3 b - 12\, a c + 25\, b^2)\omega\theta + 16\, a b^2 \rho\,,$$

---

*) KLEIN, *Weitere Untersuchungen über das Ikosäeder* [Mathematische Annalen, t. XII (1877), pp. 503-560 (pag. 535)].

$$\frac{5}{4}\theta^2\sum\frac{2\sqrt{z z''}}{(5a-z)^2}=30(24a^3+b)\theta^2-4a(64a^3+19b)\omega\theta+32a^2b\rho,$$

$$\frac{5}{4}\theta^2\sum\frac{2\sqrt{z z'}}{(5a-z)^2}=-50a\theta^2+24a^2\omega\theta+b\rho,$$

così che, indicando con λ, λ', λ''; μ, μ', μ'' i secondi membri di queste relazioni, si otterrà per C il seguente valore:

$$C=\frac{a^2B^2}{g^2b^2\theta^2}(p^2\lambda+q^2\lambda'+r^2\lambda''+qr\mu+pr\mu'+pq\mu''),$$

nel quale le p, q, r hanno come sopra i valori

$$p=f-3\frac{b}{a}\delta,\qquad q=\varepsilon+\delta,\qquad r=g.$$

Osserviamo da ultimo che, essendo

$$\sum\frac{\partial z}{\partial b}=0,\qquad\sum\frac{\partial z}{\partial c}=0,$$

il valore di A per la equazione Jacobiana, di cui le radici sono date dalla

$$\sqrt{Z}=p\sqrt{z}+q\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b}+r\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c},$$

non contiene i termini in pq, pr.

6. Per quanto si è dimostrato al Capitolo I, una equazione Jacobiana del sesto grado in Z, per la quale $A=0$, si può sempre risolvere col mezzo di funzioni ellittiche. Infatti, la equazione Jacobiana stessa, posto $Z=Y\sqrt[3]{B}$, si trasforma nella

$$Y^6+10Y^3-4\frac{C}{B^{\frac{5}{3}}}Y+5=0,$$

e dal confronto di questa con una delle equazioni, che si presentano nella trasformazione del quinto ordine delle funzioni ellittiche e che hanno la stessa proprietà caratteristica, si otterrà una equazione colla quale determinare il valore del modulo k. Considerando, per esempio, la equazione, di cui le radici sono

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}}+\sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}}\right)^2,$$

per la quale si sono trovati i valori [Capitolo I, n° 5]:

$$A = 0, \qquad B = -\frac{4^2}{k^2 k'^2}, \qquad C = 4^3 \frac{1 - 16 k^2 k'^2}{k^4 k'^4},$$

si otterrà per determinare il valore di k la relazione

$$\frac{C^3}{B^5} = -\frac{1}{4^2} \frac{(1 - 16 k^2 k'^2)^3}{k^2 k'^2},$$

e le radici della equazione Jacobiana in Z saranno i sei valori della espressione

$$Z = -\sqrt[3]{\frac{B k^2 k'^2}{16}} \left(\frac{\operatorname{cn} 2\omega}{\operatorname{cn} 4\omega} - \frac{\operatorname{cn} 4\omega}{\operatorname{cn} 2\omega} \right)^2,$$

nella quale k ha il valore dedotto dalla relazione precedente.

Vogliamo ora dimostrare che la stessa proprietà può sempre aver luogo per una equazione Jacobiana in z qualunque siano le a, b, c. Rammentiamo perciò che, essendo

$$\sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\sqrt{z'} + r\sqrt{z''},$$

1° affinchè A sia eguale a zero, devono le p, q, r soddisfare ad una equazione quadratica, di cui i coefficienti sono funzioni delle a, b, c;

2° che la Z si esprime in funzione di z per mezzo di un polinomio del quinto grado, nel quale i coefficienti sono funzioni quadratiche di p, q, r.

Ora facendo eguale a zero il coefficiente di z^5 nel polinomio stesso, il quale, come si mostrò più addietro n° 5, è

$$t_4 = pr - q^2,$$

i valori dei rapporti $p:q:r$ saranno determinati e si avrà una equazione del quarto grado in z, colla quale determinare la z in funzione di Z.

Rimane quindi dimostrato che *una equazione Jacobiana in z è sempre risolubile per funzioni ellittiche qualunque siano le a, b, c.*

Nel caso particolare, che abbiamo considerato nel n° precedente, è opportuno di far concorrere le due soluzioni Z_1, Z_2, vista la semplicità della relazione fra il prodotto di esse e la z. Si ha infatti

$$(31) \qquad z = a\left(5 - \frac{1}{gh}\sqrt{Z_1 Z_2}\right).$$

Indichiamo con M_1, N_1; M_2, N_2 i valori di B_1, C_1; B_2, C_2 allorquando nei valori stessi si pongano $a = 1$, $b = 0$, come nella equazione del moltiplicatore e nelle altre analoghe.

Dai valori di B, C, trovati nel n° precedente, si otterranno le

$$M_1 = 2c^8(c+16)^3[4(3c+64)+(c+64)\sqrt{c+16}],$$

$$M_2 = 2c^8(c+16)^3[4(3c+64)-(c+64)\sqrt{c+16}],$$

$$N_1 = \frac{M_1^2}{4c^4(c+16)}[c+17.32+8.15\sqrt{c+16}],$$

$$N_2 = \frac{M_2^2}{4c^4(c+16)}[c+17.32-8.15\sqrt{c+16}].$$

Sia ora come nella equazione del moltiplicatore $c = -4^3 k^2 k'^2$, si trovano le

$$M_1 = 4^{35} k^{16} k'^{22}(1-2k^2)^6,$$

$$M_2 = 4^{35} k^{22} k'^{16}(1-2k^2)^6,$$

$$N_1 = 4^{58} k^{24} k'^{36}(1-2k^2)^{10}(16-16k^2+k^4),$$

$$N_2 = 4^{58} k^{36} k'^{24}(1-2k^2)^{10}(1+14k^2+k^4);$$

quindi, ponendo

$$\frac{C_1^3}{B_1^5} = \frac{N_1^3}{M_1^5}, \qquad \frac{C_2^3}{B_2^5} = \frac{N_2^3}{M_2^5},$$

si avranno per la determinazione dei due valori di k, i quali indicheremo con k_1, k_2, le

$$\frac{C_1^3}{B_1^5} = \frac{1}{4}\frac{(1+14k'^2+k'^4)^3}{k^8 k'^2}, \qquad \frac{C_2^3}{B_2^5} = \frac{1}{4}\frac{(1+14k^2+k^4)^3}{k^2 k'^8}.$$

Sieno U_1, U_2 i valori di Z_1, Z_2 corrispondenti all'equazione del moltiplicatore; saranno $\chi = \mu$, $\chi' = \mu'$, $\chi'' = \mu''$ (vedi Capitolo I), e la equazione (28) darà le due seguenti:

$$(32) \qquad \begin{cases} \sqrt{U_1} = -2.4^5 k^2 k'^4(1-2k^2)\left(\sqrt{\dfrac{\lambda'\mu}{k'}} - \sqrt{\mu}\right), \\[2ex] \sqrt{U_2} = -2.4^5 k^4 k'^2(1-2k^2)\left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\dfrac{\lambda\mu}{k}}\right), \end{cases}$$

nella prima delle quali $k = k_1$ e le λ, μ hanno i valori corrispondenti, ed analogamente nella seconda per $k = k_2$. Se ora si osservi dover essere

$$\frac{Z_1}{B_1^{\frac{1}{3}}} = \frac{U_1}{M_1^{\frac{1}{3}}}, \qquad \frac{Z_2}{B_2^{\frac{1}{3}}} = \frac{U_2}{M_2^{\frac{1}{3}}},$$

si otterrà la

$$\sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt[6]{\frac{B_1 B_2}{M_1 M_2}} \sqrt{U_1 U_2},$$

e quindi per le (31), (32):

$$z = 5a - \frac{1}{2} \sqrt[6]{\theta} \sqrt[3]{\frac{k_1' k_2}{2 k_1^2 k_2'^2}} \left(\frac{\operatorname{dn} 2\omega_1}{\operatorname{dn} 4\omega_1} - \frac{\operatorname{dn} 4\omega_1}{\operatorname{dn} 2\omega_1} \right) \left(\frac{\operatorname{cnc} 2\omega_2}{\operatorname{cnc} 4\omega_2} - \frac{\operatorname{cnc} 4\omega_2}{\operatorname{cnc} 2\omega_2} \right),$$

dove ciascuna delle ω_1, ω_2 ha i sei valori indicati nel Capitolo I, ponendo nelle K, K' le k_1, k_2 in luogo di k.

Evidentemente a quest'ultimo risultato si ponno dare forme differenti.

Capitolo Terzo.

L'abbassamento dell'equazione Jacobiana del sesto grado *).

1. È noto che una fra le più importanti proprietà delle equazioni modulari è quella indicata da Galois nella sua celebre Lettera a Chevalier, la quale consiste in ciò, che le equazioni stesse sono suscettibili di un abbassamento al grado inferiore di una unità per trasformazione degli ordini

$$n = 5, \qquad n = 7, \qquad n = 11.$$

Il fatto enunciato da Galois fu dimostrato dal mio egregio amico il professore Betti in una Memoria pubblicata nei primi mesi dell'anno 1853 negli « Annali di Matematica » di Tortolini **) e fu più tardi il punto di partenza delle note ricerche del signor Hermite sulla equazione del quinto grado ***). Il signor Hermite giunse, cioè, a completare ed a dare maggior rilievo alla scoperta di Galois, indicando in qual modo potevasi ottenere quell'abbassamento, di cui era soltanto stabilita la possibilità.

Siano come antecedentemente z, z_0, ... z_4 le radici di una equazione Jacobiana

$$\sqrt{z} = a_0 \sqrt{5}, \qquad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2.$$

---

*) In questo Capitolo sono contenute le due Note da me pubblicate nel giugno e settembre 1858 negli « Annali di Matematica » col titolo: *Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado* [LII: t. I, pp. 335-341].

**) Betti, *Sull'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche* [Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. IV (1853), pp. 81-100].

***) Hermite, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 508-515].

Essendo

$$\sqrt{5} = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^4,$$

si deducono da queste relazioni le due seguenti:

$$\sqrt{z_0} + \sqrt{z} = -2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)a_0 + a_1 + a_2,$$

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = 2a_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)(a_1 + a_2),$$

per le quali

$$(\sqrt{z_0} + \sqrt{z})(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)[-4a_0^2 + 2a_0(a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)^2],$$

ed analogamente

$$(\sqrt{z_0} - \sqrt{z})(\sqrt{z_4} + \sqrt{z_1}) = (\varepsilon + \varepsilon^4)[-4a_0^2 + 2a_0(a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)^2],$$

siccome poi

$$\sqrt{z_4} - \sqrt{z_1} = (\varepsilon^4 - \varepsilon)(a_1 - a_2), \qquad \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(a_1 - a_2),$$

si otterranno le

$$(\sqrt{z_0} + \sqrt{z})(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})(\sqrt{z_4} - \sqrt{z_1}) = p(C_0 + C_1 + C_2 + C_3),$$

$$(\sqrt{z_0} - \sqrt{z})(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})(\sqrt{z_4} + \sqrt{z_1}) = q(C_0 + C_1 + C_2 + C_3),$$

essendo

$$p = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)(\varepsilon^4 - \varepsilon), \qquad q = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\varepsilon^4 + \varepsilon),$$

e le C_0, C_1, C_2, C_3 avendo i valori (14) del precedente Capitolo. Osservando ora che il prodotto $pq = -\sqrt{5}$, si avrà:

$$(z - z_0)(z_2 - z_3)(z_4 - z_1) = (C_0 + C_1 + C_2 + C_3)^2\sqrt{5},$$

per cui, posto

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}[(z - z_0)(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)]^{\frac{1}{2}},$$

sarà

$$y_0 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3.$$

Ma, se nelle C_0, C_1, ... si sostituiscono alle a_1, a_2 le $\varepsilon^r a_1$, $\varepsilon^{4r} a_2$ si ottengono le

$$\varepsilon^r C_0, \quad \varepsilon^{2r} C_1, \quad \varepsilon^{3r} C_2, \quad \varepsilon^{4r} C_3,$$

mentre una radice qualsivoglia z_m diventa la z_{m+r}, si avrà perciò che, indicando con

y_r la espressione

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}[(z - z_r)(z_{r+2} - z_{r+3})(z_{r+4} - z_{r+1})]^{\frac{1}{2}},$$

sarà

$$(1) \qquad y_r = \varepsilon^r C_0 + \varepsilon^{2r} C_1 + \varepsilon^{3r} C_2 + \varepsilon^{4r} C_3.$$

Le $y_0, y_1, \ldots y_4$ sono quindi radici di una equazione del quinto grado, di cui i coefficienti sono funzioni razionali dei coefficienti dell'equazione Jacobiana e della radice quarta del suo discriminante. Indicando questa equazione colla

$$y^5 + p_1 y^4 + p_2 y^3 + p_3 y^2 + p_4 y + p_5 = 0,$$

si hanno facilmente le relazioni seguenti:

$$p_1 = 0,$$

$$p_2 = -5(C_0 C_3 + C_1 C_2),$$

$$p_3 = 5(C_0^2 C_2 + C_1^2 C_0 + C_2^2 C_3 + C_3^2 C_1),$$

$$p_4 = -5(C_0^3 C_1 + C_1^3 C_3 + C_2^3 C_0 + C_3^3 C_2 + C_0 C_1 C_2 C_3 - C_0^2 C_3^2 - C_1^2 C_2^2),$$

e quindi, rammentando le relazioni (16), (17) del Capitolo II, si otterranno per questi coefficienti i valori

$$p_2 = 10b, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = 5(9b^2 - 4ac),$$

e dalla

$$\prod f'(z) = -4^6 \cdot 5^5 b^2$$

si dedurrà altresì

$$\prod y = 8\sqrt{-b},$$

e quindi

$$p_5 = -8\sqrt{-b}.$$

La equazione del quinto grado, di cui le radici sono le $y_0, y_1, \ldots y_4$, sarà quindi la

$$(2) \qquad y^5 + 10by^3 + 5(9b^2 - 4ac)y - 8\sqrt{-b} = 0,$$

nella quale b ha il valore dato dall'equazione (9) del Capitolo II.

Supponiamo ora che le $z, z_0, \ldots$ sieno radici di una di quelle equazioni date dalla teorica della trasformazione delle funzioni ellittiche, per le quali $b = 0$; la equazione superiore diventa in questo caso la

$$y^5 - 20acy - 8c\sqrt{c + 16a^5} = 0,$$

la quale, posto

$$y = x\sqrt[4]{4ac}, \qquad \mu = \frac{c}{a^5},$$

si trasforma nella

$$x^5 - 5x - \sqrt{2\frac{\mu + 16}{\sqrt{\mu}}} = 0.$$

In queste equazioni le a, c e quindi μ saranno funzioni del modulo k, potendo la a essere altresì un coefficiente numerico; se quindi mediante la trasformazione denominata di JERRARD si riduce una equazione qualsivoglia del quinto grado alla forma

$$x^5 - 5x - 4M = 0,$$

si avrà per la determinazione del modulo k la equazione del secondo grado

$$\mu^2 + 32(1 - 2M^2)\mu + 256 = 0.$$

Per la equazione del moltiplicatore, per esempio, essendo

$$a = 1, \qquad \mu = c = -4^3 k^2 k'^2,$$

si avrà

$$\sqrt{\mu + 16} = 4(1 - 2k^2),$$

e quindi il valore del modulo k in funzione di M.

L'abbassamento dell'equazione Jacobiana del sesto grado conduce adunque alla risoluzione della equazione del quinto grado, allorquando si supponga ridotta la equazione stessa alla forma della trasformata di JERRARD.

2. Dai valori di C_0, C_1, ..., rammentando come le a, b sono formate colle a_0, a_1, a_2, si ottiene:

$$C_0 C_1 C_2 C_3 = (5a_0^2 - a)^2 (a - a_0^2)[2b - (5a_0^2 - a)^2 (a - a_0^2)],$$

la quale dà per una qualsivoglia radice z della equazione Jacobiana:

$$5^2 C_0 C_1 C_2 C_3 = (z - a)^2 (5a - z)[10b - (z - a)^2 (5a - z)].$$

Ponendo

$$5^2 C_0 C_1 C_2 C_3 = w,$$

si deduce dopo alcune riduzioni che

$$\frac{1}{4}(w - 12ac - 5b^2) = -c(z - a) - \frac{ad}{z - a}, \tag{3}$$

essendo

$$d = 5b^2 - 4ac.$$

La quantità w avrà quindi sei valori, corrispondenti alle radici della equazione Jacobiana; e dalla relazione superiore, la quale, rammentando essere (Capitolo II)

$$z - a = \frac{1}{\xi - \alpha}, \qquad \alpha = \frac{c}{d},$$

può anche scriversi

$$\frac{1}{4d}(w - 12ac - 5b^2) = -[\alpha(z - a) + a(\xi - \alpha)],$$

si potrà facilmente dedurre la equazione del sesto grado in w.

Ma dalle equazioni (1) si hanno le

$$5C_0 = (\varepsilon^4 y), \quad 5C_1 = (\varepsilon^3 y), \quad 5C_2 = (\varepsilon^2 y), \quad 5C_3 = (\varepsilon y),$$

essendo

$$(\varepsilon y) = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4;$$

sarà perciò

$$5^2 w = (\varepsilon y)(\varepsilon^2 y)(\varepsilon^3 y)(\varepsilon^4 y),$$

ossia, indicando con r, s le espressioni

$$r = y_0 y_1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_4 + y_4 y_0,$$

$$s = y_0 y_2 + y_2 y_4 + y_4 y_1 + y_1 y_3 + y_3 y_0,$$

si avrà:

$$5w = 4.5^2 b^2 + rs;$$

od infine, ponendo

$$\psi = y_0 y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 y_3 + y_2 y_3^2 y_4 + y_3 y_4^2 y_0 + y_4 y_0^2 y_1$$
$$+ y_0 y_2^2 y_4 + y_2 y_4^2 y_1 + y_4 y_1^2 y_3 + y_1 y_3^2 y_0 + y_3 y_0^2 y_2,$$

per cui

$$rs = 15(4ac - 9b^2) - \psi,$$

si otterrà, per la (3), la relazione

$$\frac{1}{4.5}\psi = -3b^2 + c(z - a) + \frac{ad}{z - a}. \tag{4}$$

Così, ponendo

$$\varphi = r - s,$$

si ha:

$$\frac{1}{4^2 . 5}\varphi^2 = 8b^2 - 3ac + \frac{1}{4.5}\psi = dz\xi,$$

e pel valore di ξ in funzione di χ:

$$(5)\qquad \frac{1}{2\sqrt{5}}\varphi = -\chi^3 + 7a\chi^2 - 11a^2\chi + 5(a^3 - b).$$

Le equazioni del sesto grado in ψ, ed in φ, di cui le radici sono funzioni delle radici dell'equazione del quinto grado (2), sono, relativamente a quest'ultima equazione, le risolventi già calcolate da MALFATTI, da RUFFINI e dal signor CAYLEY per una equazione qualsivoglia del quinto grado. Evidentemente, se nelle equazioni del quinto grado i coefficienti del secondo e del quarto termine, come si verifica nella equazione (2), sono nulli, sussisteranno le relazioni stabilite sopra fra le funzioni ψ, φ e χ; vale a dire le radici di una equazione del quinto grado, nella quale manchino quei due termini, si potranno esprimere, come ha luogo per le radici della (2), per mezzo delle radici di una equazione Jacobiana, ossia per mezzo di funzioni ellittiche.

3. Devesi al signor HERMITE la riduzione diretta di una equazione qualunque del quinto grado in un'altra, nella quale la somma delle radici e la somma delle terze potenze delle radici sieno nulle. In una Lettera da lui indirizzata al signor BORCHARDT e pubblicata nel volume 59 del Giornale di CRELLE *) egli ha indicato una funzione delle radici di una equazione del quinto grado, la quale ha dieci valori due a due eguali e di segno contrario, ed è quindi radice di una equazione del quinto grado, di cui i coefficienti sono funzioni razionali dei coefficienti dell'equazione data e della radice quadrata del suo discriminante. Egli ha inoltre osservato che nella ridotta medesima i coefficienti del secondo e del quarto termine sono nulli e gli altri sono funzioni razionali degli invarianti della data e della radice quadrata del discriminante. Questo risultato, che ha uno speciale interesse, per quanto si espose sul finire del n° precedente e per quanto si aggiungerà in un capitolo prossimo, si completa colla determinazione effettiva dei coefficienti della ridotta nel modo seguente.

Siano

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4$$

le radici della equazione generale

$$F(x) = a_0x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0,$$

---

*) HERMITE, *Sur l'invariant du 18^me^ ordre des formes du cinquième degré et sur le rôle qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LIX (1861), pp. 304-305].

e si rappresenti con X_0 la espressione

$$X_0 = [(01)(04)(32) + (02)(03)(14)][(01)(02)(43) + (03)(04)(12)] \times$$
$$\times [(01)(03)(42) + (02)(04)(31)],$$

nella quale

$$(rs) = x_r - x_s,$$

e con X_1, X_2, ... le espressioni che si ottengono da X_0 aumentando di una unità, di due unità, ecc. l'indice delle radici. Indicando con y_0, y_1, y_2, ... le radici della ridotta e con Δ il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici x, si ha per una radice qualsivoglia y:

$$y_0 = a_0^6 \frac{X_0 \sqrt{\Delta}}{(01)(02)(03)(04)},$$

e la ridotta avrà la forma

$$y^5 + Ly^3 + M\Delta y + N\sqrt{\Delta^3} = 0,$$

essendo L, M invarianti del 12° e del 16° ordine, ed N l'invariante dell'ordine 18°.

Fra le varie trasformazioni, di cui è suscettibile il valore superiore di y_0, accenneremo alle due seguenti.

Sia $C(x)$ il covariante cubico della forma $F(x)$; si ha, non tenendo conto di un coefficiente numerico:

$$X_r = C(x_r),$$

e quindi per una radice della ridotta:

$$y_r = \frac{C(x_r)}{F'(x_r)} \sqrt{\Delta}.$$

In secondo luogo, ponendo

$$(01234) = (01)(12)(23)(34)(40),$$

$$(6) \qquad \begin{cases} u = a_0^2(01234), & u_0 = a_0^2(03412), & u_1 = a_0^2(14023), \\ u_2 = a_0^2(20134), & u_3 = a_0^2(31240), & u_4 = a_0^2(42301), \end{cases}$$

ed inoltre

$$(7) \qquad \begin{cases} v = a_0^2(02413), & v_0 = a_0^2(04231), & v_1 = a_0^2(10342), \\ v_2 = a_0^2(21403), & v_3 = a_0^2(32014), & v_4 = a_0^2(43120), \end{cases}$$

si hanno le

$$y_0 = u(u_1 u_2 - u_3 u_4) + v(v_1 v_3 - v_2 v_4),$$

$$y_1 = u(u_2 u_3 - u_4 u_0) + v(v_2 v_4 - v_3 v_0),$$

e così di seguito. A questo risultato si giunge, osservando:

1° che si hanno identicamente le

$$u u_0 u_1 = v_2 v_3 v_4, \qquad \text{ecc.};$$

2° che si hanno identicamente le

$$u(u_2 u_3 - u_2 u_4) = v(v_3 v_4 - v_1 v_2), \qquad \text{ecc.}$$

Posto ora

$$l = 5^4 A, \qquad i = 5^8 B, \qquad j = 5^{12} C, \qquad I = 5^{18} R,$$

essendo A, B, C, R gl'invarianti di 4°, 8°, 12°, 18° grado della forma F come furono definiti da CLEBSCH e GORDAN *), la ridotta di HERMITE è la seguente:

$$y^5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4^3}{5^2}(3li + 16j)y^3 - \frac{4^5}{5^3}(lj - i^2)\delta^2 y - 12 I \delta^3 = 0,$$

essendo

$$\delta = a_0^2 \sqrt{\Delta},$$

e quindi

$$5^3 \delta^2 = l^2 - 128 i.$$

Egli è evidente che le radici di questa equazione si ponno fare coincidere con quelle dell'equazione (2), se si determinano le a, b, c per modo che risulti

$$b = -\frac{1}{6} \cdot \frac{4^3}{5^3}(3li + 16j), \qquad 9b^2 - 4ac = -\frac{4^5}{5^3}(lj - i^2)\delta^2,$$

$$\sqrt{-h} = \tfrac{3}{2} I \delta^3,$$

il che può sempre ottenersi. La ridotta di HERMITE, come la (2), si risolve quindi, per quanto si espose al n° 6 del Capitolo precedente, per mezzo di funzioni ellittiche, e la stessa proprietà verificasi in conseguenza per una equazione qualsivoglia del quinto grado.

*) CLEBSCH e GORDAN, *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 2ª, t. I (1867-68), pp. 23-79].

CAPITOLO QUARTO.

Le risolventi di Malfatti, di Ruffini e di Cayley *).

1. Abbiamo dimostrato nel precedente capitolo come, mediante l'abbassamento della equazione Jacobiana del sesto grado, si ottenga una equazione quadrinomia del quinto grado, dalla quale, sia per mezzo della trasformazione di JERRARD, sia mediante la trasformata di HERMITE, si giunge alla risoluzione della equazione generale del quinto grado colle funzioni ellittiche. In questo capitolo ci occuperemo di alcuni tentativi fatti per risolvere l'equazione del quinto grado, seguendo il procedimento col quale erano state risolte le equazioni di grado inferiore, cioè col mezzo di *risolventi*, od equazioni ausiliarie. Faremo precedere queste ricerche da alcune considerazioni sulla teorica delle sostituzioni.

Denominasi, come è noto, *sostituzione* la operazione, mediante la quale si passa da una ad un'altra permutazione di più quantità. Supponendo che il numero delle quantità o lettere, sulle quali si opera, sia n numero primo, denomineremo le quantità stesse con

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_{n-1},$$

ed essendo

$$N = 1.2.3 \ldots n$$

il numero delle permutazioni delle medesime, sarà in generale N il numero delle sostituzioni distinte, comprendendovi in esso la sostituzione denominata *unità*, che lascia ciascuna quantità o lettera al posto che occupa.

Indichiamo ora con $\psi(r)$ una funzione, per la quale abbia luogo la proprietà che, ponendo in essa

$$r = 0, 1, \ldots n - 1,$$

i valori corrispondenti

$$\psi(0), \quad \psi(1), \quad \ldots \quad \psi(n-1)$$

riproducano quei valori di r ma disposti in ordine differente; una sostituzione eseguita sulle quantità

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots \quad x_{n-1}$$

potrà rappresentarsi analiticamente col simbolo

$$\binom{x_r}{x_{\psi(r)}},$$

*) In questo capitolo si riproduce in parte la Memoria: *Sulla risolvente di* MALFATTI *per le equazioni del quinto grado* [LXIV: t. II, pp. 39-56].

o più brevemente col

$$\binom{r}{\psi(r)}$$

od anche colla sola funzione $\psi(r)$.

Si indichino con $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{n-1}$ i valori della funzione $\psi(r)$ corrispondenti ad

$$r = 0, 1, \dots n-1;$$

siccome le $\psi_0, \psi_1, \dots$ riproducono i numeri stessi, sussisteranno per esse le due proprietà:

1° Se ψ_r non $\equiv 0 \pmod{n}$, sarà $\psi_r^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, ed in generale qualunque sia ψ_r si avrà $\psi_r^n \equiv \psi_r \pmod{n}$;

2° Indicando con m un numero non divisibile per $n-1$, sarà

$$\psi_0^m + \psi_1^m + \cdots + \psi_{n-1}^m \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

Da queste proprietà deducesi che le N sostituzioni, corrispondenti ad un numero n primo di lettere, ponno essere tutte rappresentate dalla funzione

$$\psi(r) \equiv a_0 r^{n-2} + a_1 r^{n-3} + \cdots + a_{n-3} r + a_{n-2} \qquad (\text{mod. } n),$$

nella quale i coefficienti $a_0, a_1, \dots a_{n-2}$ sono numeri interi compresi fra 0 ed n. La funzione $\psi(r)$ così definita può porsi facilmente sotto la forma

$$(1) \qquad \psi(r) \equiv \alpha\,\theta(r+p) + \beta \qquad (\text{mod. } n),$$

essendo

$$\theta(r) \equiv r^{n-2} + q_2 r^{n-4} + q_3 r^{n-5} + \cdots + q_{n-3} r \qquad (\text{mod. } n),$$

e la funzione $\theta(r)$ si denominerà la forma *ridotta* della sostituzione $\psi(r)$. Le $\alpha, \beta, p, q_2, \dots q_{n-3}$ sono numeri interi come gli $a_1, a_2, \dots,$ ma non può essere $\alpha \equiv 0 \pmod{n}$. Nella riduzione superiore si è supposto a_0 non $\equiv 0 \pmod{n}$; ma se fossero

$$a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_{s-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n);$$

talchè la funzione $\psi(r)$ diventi la

$$\psi(r) \equiv a_s r^{n-s-2} + a_{s+1} r^{n-s-3} + \cdots + a_{n-2} \qquad (\text{mod. } n),$$

si avrà analogamente:

$$\text{posto} \quad \left.\begin{aligned} \psi(r) &\equiv \alpha_s \theta_s (r + p_s) + \beta_s \\ \theta_s(r) &\equiv r^{n-s-2} + q_{2,s} r^{n-s-4} + \cdots + q_{n-s-3,s} r \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } n).$$

Formando il quadrato della funzione $\psi(r)$ e sommando i valori di esso corrispondenti ad

$$r = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

dovrà essere il coefficiente di $r^{n-1} \equiv 0 \pmod{n}$. Si avrà cioè che

$$2a_0 a_{n-3} + 2a_1 a_{n-4} + \cdots + 2a_{\frac{n-5}{2}} a_{\frac{n-1}{2}} + a^2_{\frac{n-3}{2}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

dalla quale relazione deducesi che, se nella funzione $\psi(r)$ i coefficienti a_0, a_1, ... fino ad $a_{\frac{n-5}{2}}$ sono congruenti a zero, lo è anche il coefficiente $a_{\frac{n-3}{2}}$, vale a dire che non sussiste sostituzione, la quale possa essere rappresentata da una funzione ψ del grado $\frac{n-1}{2}$.

Osserviamo che nella espressione (1), potendo la α assumere i valori 1, 2, ... $n-1$ e le β, p i valori 0, 1, ... $n-1$, ne segue che ad ogni funzione ridotta $\theta(r)$ corrisponderà in generale un numero $n^2(n-1)$ di sostituzioni $\psi(r)$, eccettuato il caso, in cui la funzione $\theta(r)$ fosse lineare, nel quale il numero delle sostituzioni $\psi(r)$ corrispondenti sarebbe $n(n-1)$. Indicando quindi con M il numero delle funzioni ridotte $\theta(r)$, si avrebbe in generale pel numero totale delle sostituzioni $\psi(r)$ il seguente:

$$n(n-1) + (M-1)n^2(n-1) = N,$$

da cui:

$$M = \frac{1.2.3 \ldots (n-2) - 1}{n} + 1,$$

e quindi:

per $n = 5$, $M = 2$; per $n = 7$, $M = 18$; per $n = 11$, $M = 32990$; ecc.

Limitandoci ora al caso di $n = 5$, osserviamo che, non potendo il grado del polinomio $\theta(r)$ essere superiore ad $n-2$, e non esistendo sostituzione alla quale corrisponda una forma ridotta del grado $\frac{n-1}{2}$, le sole forme ridotte saranno

$$\theta(r) \equiv r^3 + q_2 r, \qquad \theta_2(r) \equiv r \qquad (\text{mod. } 5),$$

e siccome nella $\sum_0^4 {}_r\, \theta^2(r) \equiv 0$ (mod. 5) il coefficiente di r^4 è $2q_2$, si avrà inoltre $q_2 \equiv 0$ (mod. 5); quindi in questo caso $\theta(r) \equiv r^3$ (mod. 5).

Le 1.2.3.4.5 sostituzioni per un sistema di cinque lettere si deducono dunque dai due simboli:

$$\binom{r}{\alpha r + \beta}, \qquad \binom{r}{\alpha(r+p)^3 + \beta},$$

nei quali la α può assumere i valori 1, 2, 3, 4; le p, β i valori 0, 1, 2, 3, 4; il primo simbolo darà quindi origine a venti sostituzioni ed il secondo alle altre cento.

Le espressioni delle forme ridotte per $n = 5$ furono trovate dal professore Betti, quelle per $n = 7$ dal signor Hermite.

Se operando una sostituzione sopra una data disposizione di n lettere, si ottiene una disposizione differente dalla data, nella quale alla prima lettera sia sostituita la m^{ma}, alla seconda la $(m+1)^{\text{ma}}$ e così di seguito, quella sostituzione è denominata *sostituzione circolare*. Ne segue che le n sostituzioni che si ottengono, ponendo

$$p \equiv 0, 1, 2, \ldots n-1$$

nella (1), corrispondono ad altrettante sostituzioni circolari operate sulla

$$\alpha\theta(r) + \beta,$$

comprendendo in esse la sostituzione unità. Considerando una funzione intera e razionale delle n lettere $x_0, x_1, \ldots,$ operiamo sulla medesima colle sostituzioni circolari

$$r+1, \quad r+2, \quad \ldots \quad r+n-1.$$

Sieno

$$F, \quad F_1, \quad F_2, \quad \ldots \quad F_{n-1}$$

la funzione data e le altre che si ottengono da quelle sostituzioni. Evidentemente una funzione simmetrica qualsivoglia di quelle n funzioni avrà la proprietà di non mutare di valore operando su di essa con una qualunque sostituzione circolare. Le funzioni che hanno questa proprietà sono perciò denominate *funzioni cicliche*. Il numero dei valori diversi, che può assumere una funzione ciclica, non potrà quindi essere superiore ad $1.2.3 \ldots (n-1)$.

Si denomina *prodotto* di due sostituzioni la terza sostituzione colla quale, operando sopra una data disposizione di lettere, si ottiene il medesimo risultato che applicando l'una dopo l'altra le prime due sostituzioni alla stessa disposizione di lettere. Se con S, T si indicano le due sostituzioni, indicheremo con ST il loro prodotto, cioè la sostituzione risultante dall'effettuare prima la sostituzione S, poi la sostituzione T. Per $n = 5$ sieno

$$S \equiv \alpha r^3 + \beta, \qquad T \equiv ar, \qquad S_1 \equiv \alpha_1 r^3 + \beta_1, \qquad T_1 \equiv a_1 r \qquad (\text{mod. } 5);$$

si hanno le

$$\left.\begin{aligned} TT_1 &\equiv aa_1 r, \\ ST_1 &\equiv \alpha a_1^3 r^3 + \beta, \\ TS_1 &\equiv a(\alpha_1 r^3 + \beta_1), \\ SS_1 &\equiv 3\alpha\alpha_1\beta_1^2 r^3 + 2\alpha\beta_1^3 + \beta, \end{aligned}\right\} (\text{mod. } 5)$$

ad eccezione del caso in cui $\beta_1 \equiv 0$, nel quale

$$SS_1 \equiv \alpha\alpha_1^3 r + \beta .$$

Si noti che, se sono *)

$$a,\ a_1\ Rq; \qquad \alpha,\ \alpha_1\ NRq;$$

saranno

$$aa_1,\ \alpha\alpha_1^3\ Rq; \qquad \alpha a_1^3,\ a\alpha_1,\ 3\alpha\alpha_1\beta_1^2\ NRq;$$

quindi le sostituzioni

$$ar,\ \alpha r^3 + \beta,$$

nelle quali sono

$$a\ Rq; \qquad \alpha\ NRq,$$

dànno prodotti che hanno la stessa proprietà; e le sostituzioni stesse si dicono *conjugate* o formanti un *gruppo*. L'*ordine* del gruppo o del sistema conjugato si ottiene dal numero delle sostituzioni che esso comprende; nel caso particolare superiore l'ordine è evidentemente

$$5(2+10) = 3.4.5 .$$

Il numero, che si ottiene dividendo il numero totale N delle sostituzioni pel numero che indica l'ordine del gruppo, denominasi *indice* del gruppo; il valore dell'indice nel caso considerato è

$$\frac{1.2.3.4.5}{3.4.5} = 2,$$

e la funzione delle cinque lettere che vi corrisponde avrà due valori. Così il signor Kronecker ha trovato che per $n = 7$ esiste un sistema di sostituzioni conjugate di cui l'ordine è

$$7(3+21) = 4.6.7;$$

l'indice del sistema stesso è perciò eguale a 30, vale a dire che sussistono funzioni di sette lettere le quali hanno trenta valori **).

Si noti ancora, pel caso di $n = 5$, che, se sono

$$\begin{matrix} a\ Rq, & a_1\ NRq, \\ \alpha\ NRq, & \alpha_1\ Rq; \end{matrix} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{matrix} a\ NRq, & a_1\ Rq, \\ \alpha\ Rq, & \alpha_1\ NRq; \end{matrix}$$

---

*) [I segni Rq, NRq sono abbreviazioni delle parole *resto quadratico, non resto quadratico*].

**) Kronecker, *Notiz über Gleichungen des siebenten Grades* [Monatsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1858, pp. 287-289]; Hermite, *Sur les fonctions de sept lettres* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVII (1863), pp. 750-757].

si hanno le

$$a a_1, \quad \alpha \alpha_1^3 \quad NRq; \qquad \alpha a_1^3, \quad a \alpha_1, \quad 3\alpha\alpha_1\beta_1^2 \quad Rq;$$

e che infine, se sono

$$a, \quad a_1 \quad NRq; \qquad \alpha, \quad \alpha_1 \quad Rq;$$

si ottengono analogamente:

$$a a_1, \quad \alpha \alpha_1^3 \quad Rq; \qquad \alpha a_1^3, \quad a \alpha_1, \quad 3\alpha\alpha_1\beta_1^2 \quad NRq.$$

Ne segue che effettuando sopra una funzione ciclica di cinque lettere le sostituzioni

$$(r), \qquad (4r), \qquad (3r^3 + \beta_1), \qquad (2r^3 + \beta_1),$$

ed indicando con questi stessi simboli le funzioni risultanti che vi corrispondono, se si pone

$$u = (r) - (4r), \qquad u_{\beta_1} = (3r^3 + \beta_1) - (2r^3 + \beta_1), \tag{2}$$

le funzioni u, u_0, ... u_4 per le sostituzioni

$$ar, \qquad \alpha r^3 + \beta,$$

nelle quali sono

$$a \quad Rq, \qquad \alpha \quad NRq,$$

si permutano fra loro collo stesso segno o con segno contrario; e per le sostituzioni, nelle quali sono

$$a \quad NRq, \qquad \alpha \quad Rq,$$

diventano le sei

$$v = (2r) - (3r), \qquad v_\beta = (4r^3 + \beta) - (r^3 + \beta). \tag{3}$$

Se quindi poniamo

$$U = tu + t_0 u_0 + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 + t_4 u_4, \tag{4}$$

nella quale t, t_0, ... sono indeterminate, si avrà:

1° che le sostituzioni

$$(r), \quad (3r^3 + \beta)$$

conducono alle sei funzioni, la U e le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} U_0 &= tu_0 + t_0 u - t_1 u_1 + t_2 u_3 + t_3 u_2 - t_4 u_4, \\ U_1 &= tu_1 + t_0 u - t_1 u_2 + t_2 u_4 + t_3 u_3 - t_4 u_0, \\ U_2 &= tu_2 + t_0 u - t_1 u_3 + t_2 u_0 + t_3 u_4 - t_4 u_1, \\ U_3 &= tu_3 + t_0 u - t_1 u_4 + t_2 u_1 + t_3 u_0 - t_4 u_2, \\ U_4 &= tu_4 + t_0 u - t_1 u_0 + t_2 u_2 + t_3 u_1 - t_4 u_3; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

2° che le sostituzioni

$$(4r), \quad (2r^3 + \beta)$$

condurranno alle stesse funzioni U, U_0, ... ma con segno contrario;

3° che le sostituzioni

$$(2r), \quad (r^3 + \beta); \qquad (3r), \quad (4r^3 + \beta)$$

condurranno a sei funzioni $\pm V$, $\pm V_0$, ... formate colle v, v_0, v_1, ... come le U, U_0, ... lo sono colle u, u_0, ... Ne consegue da ultimo che una funzione simmetrica qualsivoglia delle sei funzioni U^2, U_0^2, ... non può avere che due valori; e potrà quindi esprimersi in funzione dei coefficienti dell'equazione, di cui le radici sono le x_0, x_1, ..., per mezzo di radicali del secondo ordine. Vedremo nel prossimo capitolo una applicazione di questi ultimi risultati.

2. Consideriamo ora la equazione del quinto grado

$$y^5 + 10\alpha y^3 + 5\beta y + \gamma = 0, \tag{6}$$

e seguendo la via tracciata dal Malfatti nella sua Memoria: *De æquationibus quadrato-cubicis disquisitio analytica,* pubblicata negli « Atti dell'Accademia dei Fisiocritici di Siena » *) passiamo alla calcolazione di quella equazione che dal Malfatti stesso, dal Ruffini e dal Lagrange fu denominata *risolvente,* perchè si presta appunto alla risoluzione della equazione data nel caso di equazioni di grado inferiore al quinto. Indicando con Y_0, Y_1, ... le radici dell'equazione superiore, si ponga

$$Y_0 = m + p + q + n,$$
$$Y_1 = \varepsilon m + \varepsilon^2 p + \varepsilon^3 q + \varepsilon^4 n, \quad \text{ecc.}$$

Introducendo le denominazioni

$$g = mn, \quad h = pq, \quad r = m^2 q + n^2 p, \quad s = mp^2 + nq^2,$$
$$t = m^3 p + n^3 q, \quad u = mq^3 + np^3,$$

si avranno le seguenti relazioni:

$$\left\{\begin{aligned} & g + h = -2\alpha, \quad r + s = 0, \quad t + u + 3gh = 4\alpha^2 - \beta, \\ & 5(g-h)(r-s) - m^5 - p^5 - q^5 - n^5 = \gamma. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

*) [T. IV (1771), pp. 129-186].

Inoltre, ponendo

$$gh = v, \quad \xi_1 = m^2 q, \quad \xi_2 = n^2 p, \quad \eta_1 = m p^2, \quad \eta_2 = n q^2,$$

per cui

$$\xi_1 + \xi_2 = r, \quad \xi_1 \xi_2 = gv; \quad \eta_1 + \eta_2 = s, \quad \eta_1 \eta_2 = hv,$$

si avranno le

$$g = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - v}, \quad h = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - v},$$

$$\left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[r \pm \sqrt{r^2 - 4gv}], \quad \left.\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[-r \pm \sqrt{r^2 - 4hv}];$$

cioè le g, h sono funzioni di v e le ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 funzioni di r e di v. Ma dai valori delle ξ, η si hanno tosto le

$$m = \sqrt[5]{\frac{\xi_1^2 \eta_1}{h^2}}, \quad p = \sqrt[5]{\frac{\xi_2 \eta_1^2}{g^2}}, \quad q = \sqrt[5]{\frac{\xi_1 \eta_2^2}{g^2}}, \quad n = \sqrt[5]{\frac{\xi_2^2 \eta_2}{h^2}};$$

quindi la risoluzione della proposta equazione del quinto grado dipende dalla ricerca dei valori di r e di v. Dimostriamo dapprima che anche la r è una funzione di v. Infatti, dai valori di t, u si hanno le

$$ht + gu = rs = -r^2,$$

$$tu = hr^2 + gs^2 - 4g^2h^2 = -2\alpha r^2 - 4v^2,$$

e da queste

$$2ht = -r^2 + \mu, \quad 2gu = -r^2 - \mu,$$

posto

$$\mu = \sqrt{r^4 + 8\alpha r^2 v + 16 v^3}.$$

La terza delle relazioni (7) conduce quindi ad una prima equazione fra r e v, cioè

$$\mu\lambda = v(4\alpha^2 - \beta) - 3v^2 - \alpha r^2,$$

essendo

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 - v}.$$

Facendo sparire i radicali essa dà la seguente:

$$r^4 + 2\alpha(7v - 8\alpha^2 + \beta)r^2 + v[25v^2 - 40\alpha^2 v + 6\beta v + (4\alpha^2 - \beta)^2] = 0.$$

Infine, osservando essere

$$m^5 + n^5 = \frac{r}{h}(g^2 + t), \quad p^5 + q^5 = -\frac{r}{g}(h^2 + u),$$

trovasi la seconda equazione fra r, v:

$$\alpha r^3 - (25v^2 - 40\alpha^2 v + \beta v + 16\alpha^4 - 2\alpha^2\beta)r - \gamma\lambda v = 0.$$

La r può quindi esprimersi in funzione di v e dei coefficienti dell'equazione data, ed eliminando la r dalle due superiori si otterrà una equazione fra v e quei coefficienti, la quale sarà la risolvente richiesta. Quest'ultima equazione ha una forma assai rimarchevole; giacchè, posto

$$w = 25v, \qquad \tau = v - 25\alpha^2,$$

il risultato della eliminazione è:

$$[\tau^3 + 5(3\alpha^2 + \beta)\tau^2 + 5(15\alpha^4 - 2\alpha^2\beta + 3\beta^2)\tau$$
$$+ 5(25\alpha^6 - 35\alpha^4\beta + 11\alpha^2\beta^2 - \beta^3 - \alpha\gamma^2)]^2 + D\tau = 0,$$

essendo D il discriminante della (6), ossia:

$$D = I^2 - 128J,$$

nella quale:

$$I = -[16\alpha\beta(3\alpha^2 + \beta) + \gamma^2],$$

$$J = 2\beta^2(9\alpha^2 - \beta)(\alpha^2 - \beta)^2 + 12\alpha^3\beta\gamma^2 - \alpha\beta^2\gamma^2 - 27\alpha^5\gamma^2.$$

Da ultimo, ponendo $\tau = -x^2$, si ottiene la

$$(8) \quad \begin{cases} x^6 - 5(3\alpha^2 + \beta)x^4 + 5(15\alpha^4 - 2\alpha^2\beta + 3\beta^2)x^2 \\ + x\sqrt{D} - 5(25\alpha^6 - 35\alpha^4\beta + 11\alpha^2\beta^2 - \beta^3 - \alpha\gamma^2) = 0. \end{cases}$$

È questa la risolvente del MALFATTI, alla quale il RUFFINI dedicava due belle Memorie *) e che non differisce da quella calcolata dal signor CAYLEY **). Infatti, indicando con f la forma binaria generale del quinto ordine, e ponendo

$$s = \tfrac{1}{2}(ff)_4, \qquad t = -(sf)_2, \qquad H = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \qquad K = \tfrac{2}{5}s^2 - 2(sH)_2,$$

se colle stesse lettere s, t, H, K si rappresentano i primi coefficienti di quei covarianti,

---

*) RUFFINI, *Risposta ai dubbi propostigli dal socio* GIAN FRANCESCO MALFATTI *sopra la insolubilità algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, t. XII, parte I (Modena 1805), pp. 216-237]; *Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio* MALFATTI *per la soluzione delle equazioni di 5° grado* [Ibid., id., pp. 321-336].

**) CAYLEY, *On a new auxiliary Equation in the Theory of Equations of the fifth Order* [Philosophical Transactions, t. CLI (1861), pag. 263].

l'equazione superiore può scriversi:

$$a_0^6 x^6 - 5 a_0^4 s x^4 + 5 a_0^2 (3 s^2 - 2K) x^2 + a_0^2 x \sqrt{D} + 5 (s^3 - 2 s K - HI - 16 t^2) = 0,$$

essendo I, come sopra, l'invariante del quarto grado. Questa equazione dimostra che il metodo di eliminazione del MALFATTI si presta anche applicandolo ad una equazione del quinto grado non priva di alcuni termini, il che appunto fece questo autore.

Rammentando il valore delle funzioni delle radici $y_0, y_1, \ldots$ dell'equazione (6), date nel n° 2 del capitolo precedente, e denominate r, s, si ha tosto:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{5}}(r - s),$$

relazione, la quale, per quanto si espose nel n° stesso, conduce ad una trasformazione della equazione Jacobiana non priva di interesse.

3. Essendo z una radice qualsivoglia dell'equazione Jacobiana ed essendo

$$a, \quad b, \quad c, \quad d = 5 b^2 - 4 a c$$

le ordinarie quantità, pongo

$$X = -z^3 + 7 a z^2 - 11 a^2 z + 5 (a^3 - b).$$

La equazione del sesto grado in X ha la proprietà che i coefficienti del secondo e del quarto termine sono nulli; essa ha, cioè, la forma delle risolventi calcolate nel n° precedente. L'equazione in X è la seguente:

$$X^6 + 5.4 (a c - 3 b^2) X^4 + 5.4^2 (15 b^4 - 13 a b^2 c + 3 a^2 c^2) X^2$$
$$+ 4^3 (c^3 - a^3 d^2) X + 5.4^3 [(b^2 - a c)^2 (2 b^2 - a c) - b h] = 0,$$

dove h ha il solito valore (9) del Capitolo II.

Questa equazione può farsi coincidere colla risolvente di MALFATTI. Infatti, eguagliando i coefficienti delle potenze quarte e seconde si ottengono facilmente le

$$\alpha = b, \qquad \beta = 9 b^2 - 4 a c,$$

e per questi valori essendo

$$4^3 (b^2 - a c)^2 (2 b^2 - a c) = -25 \alpha^6 + 35 \alpha^4 \beta - 11 \alpha^2 \beta^2 + \beta^3,$$

si avrà dal confronto degli ultimi coefficienti

$$\gamma^2 = -4^3 h,$$

e l'eguaglianza fra i coefficienti delle potenze prime sarà soddisfatta da questi valori.

I valori dei coefficienti α, β, γ sono identici, come vedesi, ai coefficienti della equazione del quinto grado, che si è ottenuta nel capitolo precedente coll'abbassamento della equazione Jacobiana.

Ora, siccome l'equazione in X, e quindi la risolvente (8) del MALFATTI, si può risolvere per mezzo di funzioni ellittiche, rimane dimostrato che qualunque equazione del quinto grado che abbia la forma quadrinomia (6), ed in conseguenza una qualsivoglia equazione del quinto grado, è risolvibile per funzioni ellittiche.

Se non che fin qui fu con trasformazioni della equazione Jacobiana che potemmo giungere a questo risulato; vogliamo ora mostrare come la equazione Jacobiana stessa sia risolvente di una equazione generale del quinto grado.

Daremo fine a questo capitolo con una considerazione relativa alla funzione delle radici dell'equazione del quinto grado (6), che abbiamo sopra indicato con $r - s$. Rammentando quanto si è esposto al n° 1 intorno le sostituzioni per cinque lettere $y_0, y_1, \dots y_4$, vedesi facilmente che la funzione stessa è ciclica ed invariabile per le sostituzioni $\begin{pmatrix} r \\ \alpha r \end{pmatrix}$, se α è residuo quadratico di 5, e non muta che di segno, se α non è residuo quadratico. Le funzioni simmetriche delle sei espressioni, che si ottengono per mezzo delle sostituzioni

$$\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r \\ (2r)^3 + \beta \end{pmatrix}, \qquad (\beta \equiv 0, 1, 2, 3, 4),$$

saranno quindi funzioni a due valori delle radici $y_0, y_1, \dots y_4$ ed esprimibili perciò in funzione razionale dei coefficienti dell'equazione proposta e della radice quadrata del discriminante della medesima.

CAPITOLO QUINTO.

La risolvente del signor Kronecker *).

1. Devesi al mio illustre amico, prof. KRONECKER, la felice idea di aver fatto dipendere la risoluzione delle equazioni del quinto grado *direttamente* dalla equazione Jacobiana del sesto grado. Nella sua Lettera, indirizzata al signor HERMITE il 6 giugno 1858 **), egli non indicava, a dir vero, in modo esplicito il nesso esistente fra il

*) Questo capitolo comprende la Nota: *Sul metodo di* KRONECKER *per la risoluzione delle equazioni del quinto grado* [CXI: t. III, pp. 177-188].

**) KRONECKER, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 1150-1152].

metodo di risoluzione da lui enunciato e le proprietà delle equazioni Jacobiane; ma la forma della risolvente alla quale giungeva, e la espressione delle radici della medesima potevano porre sulla via. Occupato a quell'epoca da qualche tempo di alcune ricerche intorno le equazioni Jacobiane, mi fu quindi possibile presentare nel novembre di quell'anno all'Istituto Lombardo la Memoria che qui si riassume; nella quale, esponendo quello che io denominai *Metodo di Kronecker* per la risoluzione delle equazioni del quinto grado, onde distinguerlo da quello del signor HERMITE, che consisteva nell'abbassamento della equazione modulare, io lo presentava sotto una forma alquanto più generale di quella che appariva dalla Lettera sopra citata. Devesi notare però che il signor KRONECKER ha pubblicato in seguito, cioè nel giugno 1861, una interessantissima Nota sullo stesso soggetto, dalla quale risulta evidente la generalità delle sue ricerche *).

Rammentando quanto si è esposto nel n° 1 del capitolo precedente rispetto alle proprietà delle funzioni cicliche delle radici di una equazione del quinto grado, che abbiamo denominate U, U_0, ... U_4, appare manifesto che una qualunque funzione simmetrica delle sei funzioni

$$(1) \qquad z = U^2, \qquad z_0 = U_0^2, \qquad \dots \qquad z_4 = U_4^2$$

sarà una funzione a due valori delle radici dell'equazione del quinto grado e quindi esprimibile in funzione razionale dei coefficienti di questa e della radice quadrata del suo discriminante, e che inoltre questa proprietà si verifica rimanendo indeterminate le t, t_0, ...

Supponiamo ora che le U, U_0, ... debbano soddisfare l'una o l'altra terna delle relazioni seguenti:

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = U\sqrt{5},$$
$$U_0 + \varepsilon^2 U_1 + \varepsilon^4 U_2 + \varepsilon U_3 + \varepsilon^3 U_4 = 0,$$
$$U_0 + \varepsilon^3 U_1 + \varepsilon U_2 + \varepsilon^4 U_3 + \varepsilon^2 U_4 = 0;$$
$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = - U\sqrt{5},$$
$$U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \varepsilon^4 U_4 = 0,$$
$$U_0 + \varepsilon^4 U_1 + \varepsilon^3 U_2 + \varepsilon^2 U_3 + \varepsilon U_4 = 0;$$

sostituendo nelle medesime i valori (4), (5) di U, U_0, ... dati nel capitolo precedente,

*) KRONECKER, *Ueber seine algebraischen Arbeiten* [Monatsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1861, pp. 609-617].

si ha tosto dover essere nell'uno e nell'altro caso

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4,$$

inoltre nel primo caso

$$t = t_0\sqrt{5},$$

nell'altro

$$t = -t_0\sqrt{5}.$$

Riassumendo si avrà quindi che le sei funzioni (1), nelle quali le U, U_0, ... hanno i valori:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= x(u\sqrt{5} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4), \\ U_0 &= x(u + u_0\sqrt{5} - u_1 + u_2 + u_3 - u_4), \\ U_1 &= x(u - u_0 + u_1\sqrt{5} - u_2 + u_3 + u_4), \\ U_2 &= x(u + u_0 - u_1 + u_2\sqrt{5} - u_3 + u_4), \\ U_3 &= x(u + u_0 + u_1 - u_2 + u_3\sqrt{5} - u_4), \\ U_4 &= x(u - u_0 + u_1 + u_2 - u_3 + u_4\sqrt{5}), \end{aligned} \right.$$

dove x è una indeterminata, saranno radici di una equazione Jacobiana del sesto grado, nella quale i coefficienti a, b, c saranno funzioni a due valori delle radici dell'equazione data del quinto grado, e quindi esprimibili in funzione razionale dei coefficienti di quest'ultima e del suo discriminante. La equazione in z è perciò una risolvente dell'equazione del quinto grado, in quanto che, come già osservava il signor KRONECKER, allorquando sieno noti *tutti* i valori distinti di una funzione ciclica, i valori delle cinque radici si deducono razionalmente.

Se ora consideriamo due differenti funzioni U, che indicheremo con P, Q, e poniamo

$$\sqrt{z} = P + pQ,$$

essendo p una indeterminata, si potrà determinare p per modo che la condizione $a = 0$ sia verificata, vale a dire la equazione Jacobiana in z si ridurrà alla forma

$$z^6 + 10bz^3 - 4cz + 5b^2 = 0,$$

che si risolve per mezzo di funzioni ellittiche, come si è dimostrato al Capitolo II. Oppure, per quanto si è dimostrato al n° 6 dello stesso Capitolo, determinati i valori dei coefficienti a, b, c della equazione Jacobiana, di cui le radici sono le (1), si potranno dedurre quelli dei coefficienti B, C dell'equazione Jacobiana in Z, per la quale $A = 0$.

Nell'uno e nell'altro caso la equazione Jacobiana del sesto grado è risolvente di una equazione qualsivoglia del quinto grado.

2. Sieno x_0, x_1, ... x_4 le radici della equazione del quinto grado, e supponiamo che le funzioni cicliche delle medesime, denominate sopra con u, u_0, ... u_4, sieno le (6) del Capitolo III, le quali appunto soddisfano alle proprietà, che per le u, u_0, ... abbiamo esposte al n° 1 del capitolo precedente. Siccome le funzioni u, v [(6), (7) Capitolo III] soddisfano alle seguenti relazioni

$$\sum u = 2(u + v), \qquad \sum v = 2u,$$

ed alle altre che da esse si ottengono colle sostituzioni

$$\binom{r}{3r^3 + \beta};$$

si avrà che, posto

$$\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \qquad \sigma = \frac{2x}{\rho},$$

le radici della corrispondente equazione Jacobiana si potranno, per le (1), (2), esprimere nel modo seguente:

$$\sqrt{z} = \sigma(u + \rho v), \qquad \sqrt{z_0} = \sigma(u_0 + \rho v_0), \quad \ldots \quad \sqrt{z_4} = \sigma(u_4 + \rho v_4).$$

I valori dei coefficienti a, b, c sono in questo caso facilmente esprimibili in funzione dei tre invarianti l, i, j di quarto, di ottavo e di dodicesimo grado già considerati al n° 3 del Capitolo III; ponendo cioè

$$\sigma = \sqrt{5 + \sqrt{5}},$$

si avranno i valori

$$a = l - 3\delta\sqrt{5},$$

$$b = \frac{2.4^3}{3.5}[3i(l + 5\delta\sqrt{5}) - 4^3 j],$$

$$c = -\tfrac{2}{3}.4^6 j(l + 5\delta\sqrt{5})^2,$$

dove δ, come nel n° citato, è il discriminante; e si ha:

$$5^3\delta^2 = l^2 - 128i.$$

3. Vogliamo ora brevemente dimostrare in questo n°, come dalle singolari proprietà delle funzioni cicliche di cinque lettere, le quali abbiamo denominate u, v

[(6), (7) Capitolo III], si possa dedurre la proprietà già indicata nel Capitolo II per la equazione Jacobiana in Z, di contenere due costanti arbitrarie *). Osserviamo perciò, che dalla forma (2) delle funzioni $U, U_0, \ldots$ risulta la rappresentazione seguente per le radici di una equazione Jacobiana.

Si indichi con $\varphi(x_0, x_1, \ldots x_4)$ una funzione ciclica delle radici di una equazione del quinto grado, funzione che si riproduce mutata di segno quando sopra di essa si operi colla sostituzione $\begin{pmatrix} r \\ 4r \end{pmatrix}$; se si pone

$$(3) \qquad \sqrt{Z} = \tfrac{1}{2}\left(\sum \varphi + 2\rho\varphi\right),$$

dove il segno $\sum$ rappresenta la somma delle funzioni $\varphi, \varphi_0, \ldots \varphi_4$, che si ottengono operando sulla φ colle sostituzioni $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+\beta \end{pmatrix}$, essendo $\beta \equiv 0, 1, 2, 3, 4$; la espressione Z e le cinque altre che se ne deducono effettuando sulla medesima la stessa sostituzione, sono radici di una equazione Jacobiana.

Ciò posto, osserviamo:

1° Che le somme delle potenze pari delle funzioni u, v si esprimono in funzione razionale dei coefficienti dell'equazione del quinto grado e della radice quadrata del suo discriminante. Si hanno, per es., le

$$\sum u^2 = l - 3\delta, \qquad \sum u^4 = \tfrac{1}{2}(l^2 - 10l\delta + 13\delta^2),$$

$$\sum v^2 = l + 3\delta, \qquad \sum v^4 = \tfrac{1}{2}(l^2 + 10l\delta + 13\delta^2), \qquad \text{ecc.}$$

2° Che le somme delle potenze dispari delle funzioni u, v si esprimono in funzione razionale dei coefficienti dell'equazione del quinto grado, della radice quadrata del suo discriminante, delle stesse u, v e delle potenze dispari di queste; si hanno cioè le

$$\sum u^3 = -u^3 - v^3 + \tfrac{3}{2}(l - 3\delta)u + \tfrac{3}{2}(l - \delta)v,$$

$$\sum v^3 = -u^3 + 3v^3 + \tfrac{3}{2}(l + \delta)u - \tfrac{3}{2}(l + 3\delta)v,$$

$$\sum u^5 = 2u^5 + 2v^5 - \tfrac{5}{2}(l - 3\delta)u^3 - \tfrac{5}{2}(l + \delta)v^3 + \tfrac{5}{4}(l - 3\delta)^2 u + \tfrac{5}{4}(l - 3\delta)(l - \delta)v,$$

*) Vedi la mia Nota: *Sur une classe de résolvantes de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXIII (1866), pp. 685-688, 785-788].

$$\sum v^5 = 2u^5 - \tfrac{5}{2}(l-\delta)u^3 + \tfrac{5}{2}(l+3\delta)v^3 + \tfrac{5}{4}(l+3\delta)(l+\delta)u - \tfrac{5}{4}(l+3\delta)^2 v,$$

e le altre che da esse si deducono mediante la sostituzione $\left(\begin{matrix} r \\ 3r^3 + \beta \end{matrix}\right)$.

3° Che infine le potenze settime di u e di v, ed in conseguenza le potenze dispari di grado superiore, si esprimono in funzione dei coefficienti, della radice quadrata del discriminante, e delle u, v e delle loro potenze terze e quinte; vale a dire che si ha

$$u^7 = (l-3\delta)u^5 - \tfrac{1}{4}[(l-\delta)^2 + 4\delta^2]u^3 + ku + \tfrac{1}{4}[(l+\delta)^2 + 4\delta^2]\delta v - (l+3\delta)\delta v^3 + \delta v^5,$$

ed analogamente per v^7 mutando δ in $-\delta$ ed u in v; essendo

$$5^2(k - 4l\delta^2) = \frac{4^3}{3}(3li + 16j).$$

Ne segue che, ponendo

$$\varphi = au^5 + bv^5 + cu^3 + dv^3 + eu + fv,$$

si potrà soddisfare alle condizioni delle relazioni (3) con una opportuna scelta dei coefficienti indeterminati a, b, c, d, e, f. Ora una facile calcolazione conduce al seguente risultato, che la espressione più generale di $\sqrt{Z}$ è la seguente:

$$\sqrt{Z} = p(u + \rho v) + q\left[u^3 - (2\rho + 3)v^3 - \tfrac{3}{2}(\rho + 2)(l + \delta\sqrt{5})u\right]$$

$$+ r[(\rho + 1)u^5 + v^5 - \tfrac{5}{2}(\rho + 2)(l - \delta\sqrt{5})v^3 - \tfrac{5}{4}(2\rho + 3)(l - 3\delta)(l + \delta\sqrt{5})u],$$

la quale appunto contiene due quantità arbitrarie $p : q : r$. Le proprietà di queste funzioni u, v conducono così per altra via ad una delle più importanti proprietà delle radici della equazione Jacobiana del sesto grado.

CLXXIV.

SUR LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVII (1858), pp. 310-313.

Dans votre Mémoire *), vous avez démontré que chacune des quatre fonctions $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ peut être exprimée par une fonction entière, homogène du degré k des quatre fonctions $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$; laquelle fonction renferme linéairement $\frac{k^2+1}{2}$ constantes. J'ai observé que ces constantes, à un facteur commun près, sont les mêmes dans les quatre fonctions Π, seulement elles sont disposées d'une manière différente pour chacune. Afin de mieux fixer les idées, je supposerai que des fonctions $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, deux soient impaires et deux paires; je considérerai par exemple les fonctions Q, Q', Q'', Q''' de GÖPEL, et les fonctions $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ correspondantes. Or, à un facteur près, on a

$$\theta_0(x+\tfrac{1}{2}, y) = \theta_1(x, y), \qquad \theta_0(x, y+\tfrac{1}{2}) = \theta_2(x, y),$$

par conséquent, en posant dans l'équation

$$\Pi_0(x, y) = \sum (a, b, c, d)\, \theta_0^a \theta_1^b \theta_2^c \theta_3^d,$$

$x+\frac{1}{2}$ au lieu de x, on a, à un facteur constant près:

$$\Pi_1(x, y) = \sum (a, b, c, d)\, \theta_1^b \theta_0^a \theta_3^c \theta_2^d,$$

*) HERMITE, *Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes* [Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XL (1855), pp. 249-254, 304-309, 365-369, 427-431, 485-489, 536-541, 704-707, 784-787].

et, d'une manière analogue:

$$\Pi_2(x, y) = \sum (a, b, c, d)\, \theta_2^c \theta_3^d \theta_0^a \theta_1^b,$$

$$\Pi_3(x, y) = \sum (a, b, c, d)\, \theta_3^a \theta_2^b \theta_1^c \theta_0^d.$$

On en déduit qu'en supposant pour $\Pi_0(x, y)$

$$b + d \equiv 0, \qquad c + d \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2),$$

on doit avoir pour $\Pi_1(x, y)$

$$b + d \equiv 1, \qquad c + d \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2),$$

ce que vous avez trouvé comme conséquence des équations (20).

Pour déterminer les coefficients (a, b, c, d), j'observe qu'en posant

$$L = (cd)_{23} + (ac)_{23}\, g + 2(bc)_{23}\, h + \cdots,$$

$$N = (ab)_{01} + (ab)_{31}\, G + 2(ab)_{03}\, H + \cdots,$$

on a

$$LN = k^2,$$

et

$$a_0 g + b_0 h - d_0 = \frac{L}{k}[b_1 G - b_0 H - b_2(H^2 - GG')],$$

$$a_0 h + b_0 g' - c_0 = -\frac{L}{k}[a_1 G - a_0 H - a_2(H^2 - GG')],$$

$$a_1 g + b_1 h - d_1 = \frac{L}{k}[b_1 H - b_0 G' + b_3(H^2 - GG')],$$

$$a_1 h + b_1 g' - c_1 = -\frac{L}{k}[a_1 H - a_0 G' + a_3(H^2 - GG')];$$

par conséquent, si au lieu de x, y on substitue dans

$$\Theta(z_0 + Gz_3 + Hz_2,\; z_1 + Hz_3 + G'z_2)$$

les expressions

$$x + \alpha \frac{a_0 g + b_0 h - d_0}{k} + \beta \frac{a_1 g + b_1 h - d_1}{k},$$

$$y + \alpha \frac{a_0 h + b_0 g' - c_0}{k} + \beta \frac{a_1 h + b_1 g' - c_1}{k},$$

on obtient

$$\Theta[z_0 + G(z_3 + \alpha) + H(z_2 + \beta),\; z_1 + H(z_3 + \alpha) + G'(z_2 + \beta)].$$

Or, en supposant Θ_0 fonction impaire, α, β deux nombres entiers, si dans l'équation

$$e^{i\pi[\zeta_0\zeta_3+\zeta_1\zeta_2+\Phi(\zeta_3,\zeta_2)]}\Theta_0(\zeta_0+G\zeta_3+H\zeta_2,\ \zeta_1+H\zeta_3+G'\zeta_2)=\sum(a,\ b,\ c,\ d)\,\theta_0^a\theta_1^b\theta_2^c\theta_3^d,$$

on fait la substitution supérieure, et ensuite on pose $x=y=0$, le premier membre s'annule, et l'on a

$$0=\sum(a,\ b,\ c,\ d)\,\theta_0^a(\alpha\omega_0+\beta\omega_1,\ \alpha\sigma_0+\beta\sigma_1)\,\theta_1^b(\alpha\omega_0+\beta\omega_1,\ \alpha\sigma_0+\beta\sigma_1)$$
$$\times\,\theta_2^c(\alpha\omega_0+\beta\omega_1,\ \alpha\sigma_0+\beta\sigma_1)\,\theta_3^d(\alpha\omega_0+\beta\omega_1,\ \alpha\sigma_0+\beta\sigma_1),$$

ayant posé

$$\omega_0=\frac{a_0g+b_0h-d_0}{k},\qquad \text{etc.};$$

de cette équation en faisant

$$\alpha=1,\ 2,\ \ldots\frac{k-1}{2},\quad \beta=1,\ 2,\ \ldots\frac{k-1}{2},$$

$$\alpha=1,\ 2,\ \ldots\frac{k-1}{2},\quad \beta=-1,\ -2,\ \ldots-\frac{k-1}{2},$$

ou réciproquement

$$\alpha=0,\quad \beta=1,\ 2,\ \ldots\frac{k-1}{2};\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots\frac{k-1}{2},\quad \beta=0,$$

on déduira

$$\left(\frac{k-1}{2}\right)^2+\left(\frac{k-1}{2}\right)^2+\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{2}=\frac{k^2-1}{2}$$

équations au moyen desquelles on pourra déterminer les valeurs des rapports des coefficients $(a,\ b,\ c,\ d)$. Il est évident que les valeurs supérieures de α, β sont les seules qui puissent donner des équations indépendantes.

J'ai obtenu pareillement les relations entre les modules.

Votre proposition fondamentale sur la multiplication peut être obtenue par une substitution analogue, comme il est évident en observant les premières équations de la page 24 de votre Mémoire *).

La difficulté principale qui se présente en appliquant votre méthode aux fonctions Θ à plusieurs variables me semble être la recherche du nombre et des degrés des équations analogues à celle du quatrième degré de Göpel, difficulté que, jusqu'à ce jour, je n'ai su vaincre pour le cas général.

16 août 1858.

---

*) [v. la page 537 du tome XL des Comptes Rendus deja cité].

CLXXV.

SUR DIVERSES ÉQUATIONS ANALOGUES AUX ÉQUATIONS MODULAIRES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVII (1858), pp. 337-341.

J'ai étudié avec beaucoup de plaisir vos récentes recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré, et sur la transformation des équations. Vous aurez peut-être vu dans notre Journal *) que je me suis proposé de calculer l'équation dont les racines sont les fonctions, de la forme que vous avez indiquée, des racines de l'équation du multiplicateur pour la transformation du cinquième ordre, au moyen de la propriété caractéristique de ces racines énoncée par JACOBI. Le calcul est assez simple; il paraîtra dans le cahier du 1er août **). J'ai vu après que le P. JOUBERT avait aussi formé cette équation.

La théorie des fonctions elliptiques présente bon nombre d'autres équations dont les racines ont la propriété trouvée par JACOBI pour celles du multiplicateur. Elles peuvent se déduire des considérations suivantes. En posant

$$\psi(x, m) = (2m + \mu)x + \frac{\omega}{4}(2m + \mu)^2 - m\nu,$$

on a:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m e^{i\pi\psi(x,m)} = \sum_{0}^{n-1}{}_s \sum_{-\infty}^{\infty}{}_r e^{i\pi\psi(x,nr+s)};$$

ou bien, si l'on suppose n impair:

$$\theta_{\mu,\nu}(x, \omega) = \sum_{0}^{n-1}{}_s (-1)^{\nu s} e^{i\pi\varphi(x,s)} \theta_{\mu,\nu}(X_s, n^2\omega),$$

*) [XLIX: t. I, pp. 321-324].

**) [LII: t. I, pp. 335-341].

étant

$$\varphi(x, s) = [2s - \mu(n-1)]\left\{x + \frac{\omega}{4}[2s - \mu(n-1)]\right\},$$

$$X_s = nx + \frac{n\omega}{2}[2s - \mu(n-1)].$$

Mais l'équation précédente peut aussi s'écrire:

$$\theta_{\mu,\nu}(x, \omega) = \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}^s (-1)^{\nu s} e^{i\pi\varphi(x,s)} \theta_{\mu,\nu}(X_s, n^2\omega) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}^s (-1)^{\nu(n-s)} e^{i\pi\varphi(x,n-s)} \theta_{\mu,\nu}(X_{n-s}, n^2\omega);$$

par conséquent, après quelques réductions, on aura:

$$\theta_{\mu,\nu}(x, \omega) = e^{i\pi\varphi(x,0)}\theta_{\mu,\nu}(X_0, n^2\omega) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}^s (-1)^{\nu s}[e^{i\pi\varphi(x,s)}\theta_{\mu,\nu}(X_s, n^2\omega) + e^{i\pi\varphi(x,-s)}\theta_{\mu,\nu}(X_{-s}, n^2\omega)].$$

De cette équation on déduit tout de suite la suivante:

$$(1)\quad \theta_{0,\nu}(x, \omega) = \theta_{0,\nu}(nx, n^2\omega) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}^s (-1)^{\nu s} e^{i\pi s^2\omega} \left\{ \begin{array}{l} e^{2i\pi sx}\theta_{0,\nu}[n(x+s\omega), n^2\omega] \\ + e^{-2i\pi sx}\theta_{0,\nu}[n(x-s\omega), n^2\omega] \end{array} \right\},$$

et après quelques calculs celle-ci:

$$(2)\quad (-1)^{\nu\frac{n-1}{2}}\theta_{1,\nu}(x, \omega) = \theta_{1,\nu}(nx, n^2\omega) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}^s (-1)^{\nu s} e^{i\pi s^2\omega} \left\{ \begin{array}{l} e^{2i\pi sx}\theta_{1,\nu}[n(x+s\omega), n^2\omega] \\ + e^{-2i\pi sx}\theta_{1,\nu}[n(x-s\omega), n^2\omega] \end{array} \right\}.$$

Or si l'on pose dans (1) $x = 0$ et $\frac{\omega + 2\rho}{n}$ au lieu de ω, on obtient, en supposant n un nombre premier:

$$\theta_{0,\nu}\left(0, \frac{\omega + 2\rho}{n}\right)$$

$$= \theta_{0,\nu}(0, n\omega) + 2\sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}^s (-1)^{\nu s} \alpha^{\rho s^2} e^{i\pi\frac{s^2\omega}{n}} \theta_{0,\nu}(s\omega, n\omega) \qquad (\rho = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

α étant une racine imaginaire de l'équation $\alpha^n = 1$; et semblablement on a:

$$\theta_{1,0}\left(0, \frac{\omega + 2\rho}{n}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}\rho n}\left[\theta_{1,0}(0, n\omega) + 2\sum_1^{\frac{n-1}{2}} {}^s \alpha^{\rho s^2} e^{i\pi\frac{s^2\omega}{n}} \theta_{1,0}(s\omega, n\omega)\right].$$

Un exemple d'une autre espèce de ces équations est le suivant qu'on déduit de l'équation (1):

$$\theta_{0,0}\left[\frac{\omega + 2\rho}{2n}, \frac{2(\omega + 2\rho)}{n}\right]$$

$$= \theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}, 2n\omega\right) + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} e^{2i\pi\frac{s^2\omega}{n}} \alpha^{2\rho s^2} \left\{ \begin{array}{l} \quad e^{i\pi\frac{s}{n}\omega} \alpha^{\rho s} \theta_{0,0}\left[(4s+1)\frac{\omega}{2}, 2n\omega\right] \\ + e^{-i\pi\frac{s}{n}\omega} \alpha^{-\rho s} \theta_{0,0}\left[(4s-1)\frac{\omega}{2}, 2n\omega\right] \end{array} \right\};$$

en effet, on a:

$$\theta_{0,0}\left(\frac{\nu\omega}{2}, 2n\omega\right) + e^{\frac{n-\nu}{2}i\pi\omega} \theta_{0,0}\left(\frac{2n-\nu}{2}\omega, 2n\omega\right) = \theta_{0,0}\left(\frac{\nu\omega}{4}, \frac{n\omega}{2}\right) \quad (\nu \text{ impair}),$$

et en conséquence:

$$\theta_{0,0}\left[\frac{\omega + 2\rho}{2n}, \frac{2(\omega + 2\rho)}{n}\right] = \theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{4}, \frac{n\omega}{2}\right) + \alpha^{\rho} e^{\frac{i\pi}{n}\omega} \theta_{0,0}\left(\frac{3\omega}{4}, \frac{n\omega}{2}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \alpha^{(n-4)\rho} e^{(n-4)\frac{i\pi}{n}\omega} \theta_{0,0}\left[\frac{(n-2)\omega}{4}, \frac{n\omega}{2}\right] + \alpha^{(n-2)\rho} e^{(n-2)\frac{i\pi}{n}\omega} \theta_{0,0}\left(\frac{n\omega}{2}, 2n\omega\right).$$

Si l'on désigne le multiplicateur par χ et l'on pose $u = \sqrt[4]{k}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$, les inconnues dans ces équations seront χ, χv^2, $\chi\lambda$, $\chi\lambda'$, ... Pour $x = \frac{\chi v^2}{u^2}$, les équations correspondantes aux transformations du troisième et du cinquième ordre seraient

$$x^4 - 6x^2 - 4\left(k + \frac{1}{k}\right)x - 3 = 0,$$

$$x^6 - 10x^5 + 35x^4 - 60x^3 + 55x^2 + 2\left[3 - 8\left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right)\right]x + 5 = 0.$$

L'étude de votre fonction de transformation des équations algébriques m'a conduit à quelques théorèmes, au moyen desquels se simplifie le calcul de la transformée. Le principal entre ces théorèmes est le suivant: Toute fonction des coefficients de la transformée satisfait à des équations aux dérivées partielles linéaires *). De là, en supposant que la fonction des coefficients de la transformée soit homogène à l'égard des

*) [CX: t. III, pp. 171-176].

indéterminées T_0, T_1, ..., et qu'on la représente par

$$\sum \frac{\Pi q}{\Pi \nu_0 . \Pi \nu_1 \ldots \Pi \nu_{n-1}} (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}) T_0^{\nu_0} T_1^{\nu_1} \ldots T_{n-1}^{\nu_{n-1}},$$

$$(\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{n-1} = q)$$

on déduit entre les coefficients $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1})$ (qui sont des fonctions homogènes des coefficients de l'équation donnée), un grand nombre de relations par lesquelles on peut facilement déterminer ces coefficients $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1})$, connaissant un seul d'entre eux. Si la fonction des coefficients de la transformée est un invariant ou le premier coefficient d'un covariant, le calcul par cette méthode devient encore plus simple. Par conséquent, il convient dans la transformée de faire disparaître auparavant le second terme, parce que par cette opération les coefficients des autres termes deviennent les premiers coefficients des covariants associés à la transformée.

23 août 1858.

CLXXVI.

SUR LA THÉORIE DES FORMES CUBIQUES À TROIS INDÉTERMINÉES.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVI (1863), pp. 304-307.

La théorie des formes cubiques ternaires présente une réduction à l'intégrale elliptique où n'entre qu'un seul paramètre, tout à fait analogue à celle que vous avez donnée dans votre premier Mémoire sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.

Soit $u(x_1, x_2, x_3)$ une forme cubique ternaire; s, t ses invariants du quatrième et du sixième degré; h, k ses covariants du troisième et du sixième ordre, c'est-à-dire qu'en posant

$$u_r = \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_r}, \quad u_{r,s} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}; \quad h_r = \frac{1}{3}\frac{\partial h}{\partial x_r}, \quad h_{r,s} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 h}{\partial x_r \partial x_s}; \quad k_r = \frac{1}{3}\frac{\partial k}{\partial x_r};$$

et

$$(\alpha\beta)^{11} = \alpha_{22}\beta_{33} + \alpha_{33}\beta_{22} - 2\alpha_{23}\beta_{23},$$

$$(\alpha\beta)^{23} = \alpha_{12}\beta_{13} + \alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{11}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{11},$$

on ait:

$$h = 6\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \qquad k = \sum (uh)^{rs} u_r h_s.$$

Ces invariants et covariants sont connus, et on trouve leurs expressions dans les Mémoires de MM. CAYLEY et ARONHOLD; mais je ne crois pas qu'on ait encore considéré un troisième covariant qui semble devoir jouer un grand rôle dans la théorie

des formes cubiques ternaires. Ce covariant

$$\theta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix}$$

a des propriétés analogues aux propriétés du covariant du sixième ordre des formes biquadratiques à deux indéterminées; par exemple le carré de θ peut s'exprimer en fonction rationnelle, entière, des covariants u, h, k et des invariants s, t.

M. ARONHOLD, dans son Mémoire *) publié dans le volume LV du Journal de M. BORCHARDT, a donné les expressions S_{ab}, T_{ab} des invariants du quatrième et du sixième degré de la forme cubique ternaire

$$au + bh;$$

en posant dans ces expressions $a = h$, $b = -u$, et en indiquant par S, T les expressions résultantes, on a

$$S = sh^4 - 4th^3u + 6s^2h^2u^2 - 4sthu^3 + (4t^2 - 3s^3)u^4,$$

$$T = th^6 - 6s^2h^5u + 15sth^4u^2 - 20t^2h^3u^3 + 15s^2th^2u^4$$
$$- 6s(3s^3 - 2t^2)hu^5 + t(9s^3 - 8t^2)u^6,$$

au moyen desquelles la valeur de θ^2 peut se réduire à la forme

$$54\theta^2 = (6k - 2tu^2)^3 - 3S(6k - 2tu^2) + 2T.$$

Soient α_1, α_2, α_3 trois quantités indéterminées; si l'on multiplie le déterminant θ par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix},$$

on obtient, en posant $\sum \alpha u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$:

$$\theta\Delta = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \sum \alpha u & \sum \alpha h & \sum \alpha k \\ u & h & 2k \\ du & dh & dk \end{vmatrix}.$$

---

*) ARONHOLD, *Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LV (1858), pp. 97-191 (pag. 176)].

Or, en supposant que x_1, x_2, x_3 rendent $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, on a:

$$S = s h^4, \quad T = t h^6, \quad \theta \Delta = \frac{1}{3}(h\, dk - 2k\, dh) \sum \alpha u,$$

et par conséquent:

$$54\, \theta^2 = h^6 \left[\left(\frac{6k}{h^2} \right)^3 - 3s \left(\frac{6k}{h^2} \right) + 2t \right],$$

$$\theta \Delta = \frac{h^3}{18} d \left(\frac{6k}{h^2} \right) \sum \alpha u,$$

d'où, en posant $z = \dfrac{6k}{h^2}$, on tire:

$$\frac{\Delta}{\sum \alpha u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 3sz + 2t}}.$$

De cette équation on déduit le théorème suivant:

Soit $u(x, y) = 0$ *une équation du troisième degré entre* x *et* y; *en considérant* y *comme une fonction de* x, *on aura*

$$\frac{dx}{u'(y)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 3sz + 2t}},$$

z *étant lié à* x *par la relation* $z = \dfrac{6k}{h^2}$.

Cette réduction d'intégrale est très importante. M. Aronhold avait déjà communiqué une transformation de cette espèce à l'Académie de Berlin dans sa séance du 25 avril 1861 *). On peut voir la liaison qui existe entre sa transformation et la précédente, en observant que le développement du déterminant

$$P = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & 0 \\ h_{11} - z u_{11} & h_{12} - z u_{12} & h_{13} - z u_{13} & u_1 \\ h_{21} - z u_{21} & h_{22} - z u_{22} & h_{23} - z u_{23} & u_2 \\ h_{31} - z u_{31} & h_{32} - z u_{32} & h_{33} - z u_{33} & u_3 \end{vmatrix}$$

nous donne

$$P = \frac{1}{2} z^2 \sum (u u)^{rs} u_r u_s - z \sum (u h)^{rs} u_r h_s + \frac{1}{2} \sum (h h)^{rs} h_r h_s;$$

---

*) Aronhold, *Algebraische Reduction des Integrales* $\int F(xy)\,dx$, *wo* $F(xy)$ *eine beliebige rationale Function von* x, y *bedeutet, und zwischen diesen Grössen eine Gleichung dritten Grades von der allgemeinsten Form besteht, auf die Grundform der elliptischen Transcendenten* [Monatsberichte der k. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1861, pp. 462-468 (pag. 464)].

mais on a

$$\frac{1}{2}\sum (uu)^{rs} u_r u_s = -\frac{1}{6}h^2, \qquad \sum (uh)^{rs} u_r h_s = k, \qquad \sum (hh)^{rs} h_r h_s = 0;$$

en conséquence:

$$P = -\frac{1}{6} h^2 z\left(z + \frac{6k}{h^2}\right),$$

ou, en substituant pour z sa valeur:

$$P = -12\frac{k^2}{h^2}.$$

Or, en posant

$$Q = u_1\frac{\partial P}{\partial h_1} + u_2\frac{\partial P}{\partial h_2} + u_3\frac{\partial P}{\partial h_3},$$

on obtient très facilement

$$P = zQ;$$

donc

$$Q = -2k, \qquad z = \frac{6k}{h^2} = \frac{P}{Q} = \frac{h_1\frac{\partial P}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial P}{\partial h_2} + h_3\frac{\partial P}{\partial h_3}}{u_1\frac{\partial P}{\partial h_1} + u_2\frac{\partial P}{\partial h_2} + u_3\frac{\partial P}{\partial h_3}},$$

la dernière desquelles revient à la substitution de M. Aronhold.

16 février 1863.

CLXXVII.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES COVARIANTS AU CALCUL INTÉGRAL *).

(Extrait d'une lettre à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVI (1863), pp. 659-663.

Soient $u(x, y)$ une forme à deux indéterminées d'ordre n; $\varphi(x, y)$ un covariant d'ordre m de la même forme. En posant

$$(1)\qquad u\left(xX - \frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y}Y,\ \ yX + \frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}Y\right) = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)(X, Y)^n,$$

les coefficients $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont, comme vous l'avez démontré, des covariants de la forme u et précisément ses covariants associés.

Soit $x_1 : y_1$ une racine de l'équation $u(x, y) = 0$; en substituant x_1 à x, y_1 à y dans l'équation supérieure et en posant

$$(2)\qquad x = x_1 X - \frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}Y, \qquad y = y_1 X + \frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}Y,$$

on aura:

$$u(x, y) = (0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(X, Y)^n,$$

dans laquelle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont des fonctions de x_1, y_1.

Les deux équations (2) nous donnent les suivantes:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = m\varphi X, \qquad x\frac{\partial u}{\partial x_1} + y\frac{\partial u}{\partial y_1} = n\varphi_1 Y;$$

*) [Questa Memoria porta questo titolo solo nell'indice del volume LVI dei *Comptes Rendus*, ma non nel testo, in cui invece è detto solo: *Extrait d'une lettre à* M. HERMITE].

par conséquent, si l'on fait

$$(3)\qquad z = -\frac{x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}}{x\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + y\dfrac{\partial u}{\partial y_1}},$$

on aura:

$$X = -\frac{n}{m}\frac{\varphi_1}{\varphi}Yz,$$

et, en substituant:

$$u(x, y) = Y^n.(o, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\left(-\frac{n}{m}\frac{\varphi_1}{\varphi}z, 1\right)^n = Y^n.\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant un polynôme du degré $n - 1$. Mais de la relation (3) on a:

$$y\,dx - x\,dy = -\frac{n}{m}\varphi_1 Y^2 dz;$$

par conséquent, en supposant n pair et égal à $2r$, on aura:

$$(4)\qquad \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt[r]{u(x, y)}} = -\frac{n}{m}\frac{\varphi_1 dz}{\sqrt[r]{\psi(z)}}.$$

Soit $n = 4$, et

$$h = \frac{1}{3^2 \cdot 4^2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{vmatrix}, \qquad \theta = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y}\end{vmatrix},$$

soient les deux covariants irréductibles de la forme biquadratique $u(x, y)$; en supposant $\varphi = h$ et $x = x_1$, $y = y_1$, on aura:

$$h_0 = 0, \quad h_1 = -\tfrac{1}{2}\theta, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = -\tfrac{1}{8}sh\theta, \quad h_4 = th^3 = -\tfrac{1}{4}t\theta^2,$$

s, t étant les invariants de la forme u. En substituant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient, après quelques réductions, la formule

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{u(x, y)}} = \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - sz - t}}.$$

J'avais déjà donné cette transformation dans une Note publiée dans les *Annali di Matematica*, t. III, année 1860 *), mais par une méthode particulière. Je pourrais donner d'autres exemples; mais, sans insister plus longtemps sur les formes à deux

*) [LXII: t. II, pp. 29-34].

indéterminées, je passe aux formes ternaires, en me limitant pour le moment aux formes cubiques.

Soit $u(x_1, x_2, x_3)$ une forme cubique; h, k, θ; s, t ses covariants et ses invariants. En se rappelant que

$$\theta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix},$$

si l'on pose $w_r = \frac{\partial \theta}{\partial u_r}$, $v_r = \frac{\partial \theta}{\partial k_r}$, et si l'on substitue dans u, au lieu de x_1, x_2, x_3, les y_1, y_2, y_3 données par les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 Y_1 + v_1 Y_2 + w_1 Y_3, \\ y_2 = x_2 Y_1 + v_2 Y_2 + w_2 Y_3, \\ y_3 = x_3 Y_1 + v_3 Y_2 + w_3 Y_3, \end{cases}$$

on aura:

$$u(y_1, y_2, y_3) = a Y_1^3 + b Y_2^3 + c Y_3^3 + 3d Y_2^2 Y_3 + 3e Y_3^2 Y_1 + 3f Y_1^2 Y_2$$
$$+ 3g Y_2 Y_3^2 + 3i Y_3 Y_1^2 + 3j Y_1 Y_2^2 + 6l Y_1 Y_2 Y_3;$$

et les coefficients $a, b, c, \ldots$, seront des covariants de la forme $u(x_1, x_2, x_3)$. Si l'on suppose

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

on peut calculer facilement ces coefficients, et l'on trouve:

$$a = u(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$b = u(v_1, v_2, v_3) = -u\theta = 0,$$

$$c = u(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{9}\theta(sth^4 + 3s^2h^2k - 36tk^2),$$

$$3d = \sum w\frac{\partial u}{\partial v} = 3k\theta,$$

$$3e = \sum x\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{2}{9}h(9sk^2 + 3th^2k - s^2h^4),$$

$$3f = \sum v\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$3g = \sum v\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{2}{3}h\theta(th^2 - 3sk),$$

$$3i = \sum w \frac{\partial u}{\partial x} = 3\theta,$$

$$3j = \sum x \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{1}{2} h^3,$$

$$6l = \frac{2}{3}(18k^2 - sh^4).$$

Les équations (5), multipliées par $u_1, u_2, u_3;\ h_1, h_2, h_3;\ k_1, k_2, k_3$, nous donnent:

$$(6) \qquad \begin{cases} y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = \theta Y_3, \\ y_1 h_1 + y_2 h_2 + y_3 h_3 = h Y_1, \\ y_1 k_1 + y_2 k_2 + y_3 k_3 = 2k Y_1 + \theta Y_2; \end{cases}$$

par conséquent, en supposant

$$(7) \qquad z = -\frac{y_1 h_1 + y_2 h_2 + y_3 h_3}{y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3},$$

on aura:

$$Y_1 = -\frac{\theta}{h} Y_3 z,$$

et

$$(8) \qquad u(y_1, y_2, y_3) = \theta Y_3 (A Y_2^2 + 2B Y_2 Y_3 + C Y_3^2),$$

étant

$$A = \frac{1}{2}(h^2 z + 6k),$$

$$B = \frac{1}{3h}[(sh^4 - 18k^2)z + h^2(th^2 - 3sk)],$$

$$C = \frac{1}{9h^2}[27\theta^2 z^2 - 2h^2(9sk^2 + 3th^2k - s^2h^4)z + h^2(sth^4 + 3s^2h^2k - 36tk^2)],$$

ou bien

$$u(y_1, y_2, y_3) = \theta \frac{Y_3}{A}[(A Y_2 + B Y_3)^2 - Y_3^2(B^2 - AC)],$$

étant

$$B^2 - AC = \frac{3}{2}\theta^2(2t + 3sz - z^3).$$

Des équations (6), (7) on a:

$$h\frac{\partial Y_1}{\partial y_r} = h_r, \quad \theta\frac{\partial Y_2}{\partial y_r} = \frac{1}{h}(hk_r - 2kh_r), \quad \theta\frac{\partial Y_3}{\partial y_r} = u_r,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{1}{\theta^2 Y_3^2}(y_2 v_3 - y_3 v_2), \quad \frac{\partial z}{\partial y_2} = \frac{1}{\theta^2 Y_3^2}(y_3 v_1 - y_1 v_3), \quad \frac{\partial z}{\partial y_3} = \frac{1}{\theta^2 Y_3^2}(y_1 v_2 - y_2 v_1).$$

Donc, en dérivant par rapport à y_r l'équation (8), on obtiendra :

$$\frac{\partial u}{\partial y_r} = \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{hk_r - 2kh_r}{h\theta} + \frac{\partial u}{\partial Y_3}\frac{u_r}{\theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_r},$$

et, en conséquence :

$$v_1\frac{\partial u}{\partial y_1} + v_2\frac{\partial u}{\partial y_2} + v_3\frac{\partial u}{\partial y_3} = \frac{\partial u}{\partial Y_2} = 2\theta Y_3(AY_2 + BY_3).$$

Or, en supposant

$$u(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

on a :

$$AY_2 + BY_3 = \tfrac{1}{2} Y_3 \theta \sqrt{6(2t + 3sz - z^3)};$$

donc

$$\sum v\frac{\partial u}{\partial y} = \theta^2 Y_3^2 \sqrt{6(2t + 3sz - z^3)};$$

mais de l'équation (7) on déduit aussi :

$$\theta^2 Y_3^2 dz = \begin{vmatrix} dy_1 & dy_2 & dy_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \Delta;$$

donc la substitution (7) conduira à la transformation :

$$\frac{\Delta}{\sum v\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{dz}{\sqrt{6(2t + 3sz - z^3)}}.$$

On peut obtenir les valeurs de la substitution inverse, c'est-à-dire les valeurs des rapports $y_1 : y_2 : y_3$, qui annulent la fonction $u(y_1, y_2, y_3)$, en fonction de z, en substituant dans les équations (5), au lieu de Y_1, Y_2, leurs valeurs

$$Y_1 = -\frac{\theta}{h} Y_3 z, \qquad Y_2 = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{2}m\theta - B\right) Y_3,$$

ayant posé $m = \sqrt{6(2t + 3sz - z^3)}$. Mais des équations

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0, \quad x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 = h, \quad x_1k_1 + x_2k_2 + x_3k_3 = 2k,$$

on déduit

$$\theta x_r = h\rho_r + 2kv_r,$$

étant $\rho_r = \frac{\partial \theta}{\partial h_r}$; par conséquent, en indiquant avec δ une indéterminée, on aura:

$$y_r = \delta\left[\frac{1}{2} m\theta v_r + A(w_r - \zeta\rho_r) - \left(2\frac{k}{h}A\zeta + B\right)v_r\right],$$

ou encore, en introduisant le déterminant P de ma première Lettre *):

$$y_r = 3\delta\theta\left(\frac{1}{6} m v_r - \frac{\partial P}{\partial h_r}\right).$$

Cette transformation est celle donnée par M. ARONHOLD **).

6 avril 1863.

*) [CLXXVI: t. IV, pp. 331-334].

**) ARONHOLD, *Algebraische Reduction des Integrales* $\int F(x, y)dx$, *wo* $F(x, y)$ *eine rationale Function von* x, y *bedeutet*, etc. [Monatsberichte der k. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1861, pp. 462-468].

CLXXVIII.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVII (1863), pp. 106-108.

Permettez-moi de vous entretenir un moment de quelques relations entre les équations analogues à celles du multiplicateur, dans la théorie des fonctions elliptiques, et celles de la théorie des formes cubiques à trois indéterminées; ces relations, établissant une nouvelle liaison entre ces formes et la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques, peuvent avoir quelque intérêt pour vous qui le premier avez signalé un fait analytique de la même espèce. Soient S, T les invariants d'une forme cubique ternaire U; s, t ceux de sa transformée canonique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz;$$

en indiquant avec d le déterminant de la substitution propre à réduire U à la forme canonique, on aura :

$$S = d^4 s = 4d^4 l(l^3 - 1), \quad T = d^6 t = d^6(8l^6 + 20l^3 - 1),$$

et les racines x_1, x_2, x_3, x_4 de l'équation

$$x^4 - 6Sx^2 + 8Tx - 3S^2 = 0 \tag{1}$$

peuvent s'exprimer au moyen des formules

$$\sqrt{x_1} = ld\sqrt{-6}, \qquad \sqrt{x_3} = (l - \alpha)d\sqrt{2},$$
$$\sqrt{x_2} = (l - 1)d\sqrt{2}, \qquad \sqrt{x_4} = (l - \alpha^2)d\sqrt{2},$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'unité; c'est-à-dire, les deux propriétés évi-

dentes des coefficients de l'équation supérieure donnent pour les racines les deux conditions

$$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}=-\sqrt{-3x_1},\quad \sqrt{x_2}+\alpha\sqrt{x_3}+\alpha^2\sqrt{x_4}=0.$$

Or on peut déterminer deux, et seulement deux, fonctions entières de $\sqrt{x}$, qui ont la propriété de vérifier deux équations linéaires analogues aux précédentes. En nommant $\sqrt{X}$ une quelconque de ces fonctions, et $X_1, X_2, \ldots$, les valeurs de X correspondantes à $x = x_1, x_2, \ldots$, on doit avoir pour ces fonctions

$$\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}+\sqrt{X_4}=-\sqrt{-3X_1},\quad \sqrt{X_2}+\alpha\sqrt{X_3}+\alpha^2\sqrt{X_4}=0,$$

et l'on trouve très facilement que ces fonctions sont

$$\sqrt{X}=\sqrt{x},\quad \sqrt{X}=(x^3-7Sx+8T)\sqrt{x}. \tag{2}$$

Évidemment l'équation dont les racines sont données par les valeurs de la seconde de ces fonctions correspondantes à $x = x_1, x_2, \ldots$, aura la forme de l'équation (1), et cela aura lieu aussi pour l'équation dont les racines sont les valeurs d'une fonction linéaire des deux fonctions (2) correspondantes à $x = x_1, x_2, \ldots$. Or on a le

THÉORÈME I. — *L'équation dont les racines sont données par les valeurs de l'expression*

$$\sqrt{x}=\frac{1}{S}\left[aS+\frac{1}{2}b(x^3-7Sx+8T)\right]\sqrt{x}, \tag{3}$$

correspondantes à $x = x_1, x_2, \ldots$, est la suivante:

$$X^4-6S_{ab}X^2+8T_{ab}X-3S_{ab}^2=0,$$

S_{ab}, T_{ab} indiquant les invariants de la forme $aU+bH$, et H le hessien de la forme U.

J'ai cherché aussi les deux fonctions entières de $\sqrt{x}$ qui satisfont aux équations suivantes:

$$\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}+\sqrt{X_4}=\sqrt{-3X_1},\quad \sqrt{X_2}+\alpha^2\sqrt{X_3}+\alpha\sqrt{X_4}=0;$$

elles sont

$$(x^3-5Sx+8T)\sqrt{x},\quad (x^2-5S)\sqrt{x},$$

et l'on a:

THÉORÈME II.—*L'équation dont les racines sont données par les valeurs de l'expression*

$$\sqrt{X}=\frac{1}{2S}[a(x^3-5Sx+8T)-bS(x^2-5S)]\sqrt{x}, \tag{4}$$

correspondantes à $x = x_1, x_2, \ldots$, est la suivante:

$$X^4-6S^{ab}X^2+8T^{ab}X-3(S^{ab})^2=0,$$

S^{ab}, T^{ab} *étant les invariants de la forme cubique* $aP + bQ$, *et* P, Q *les deux contre-variants du troisième ordre de la forme* U.

Corollaire 1. — En supposant dans l'expression (3) $a = 0$, $b = 1$, on aura:

$$\sqrt{X} = \frac{1}{2S}(x^3 - 7Sx + 8T)\sqrt{x},$$

de laquelle, au moyen de l'équation (1), on déduit:

$$X = \frac{3S^2}{x} - 2T;$$

mais dans ce cas

$$S_{ab} = 4T^2 - 3S^3, \quad T_{ab} = T(9S^3 - 8T^2),.$$

par conséquent, en substituant dans l'équation

$$X^4 - 6(4T^2 - 3S^3)X^2 + 8T(9S^3 - 8T^2)X - 3(4T^2 - 3S^3)^2 = 0,$$

l'expression $3S^2y - 2T$ au lieu de X, on obtiendra l'équation à racines réciproques de l'équation donnée.

Corollaire 2. — En supposant dans l'expression (4) $a = 1$, $b = 0$, on aura par l'équation (1):

$$X = 3S\left(x + \frac{S}{x}\right) - 2T,$$

mais dans ce cas:

$$S^{ab} = 4(T^2 + 3S^3), \quad T^{ab} = 8T(9S^3 - T^2).$$

Par conséquent, en posant au lieu de X, dans l'équation

$$X^4 - 24(T^2 + 3S^3)X^2 + 64T(9S^3 - T^2)X - 48(T^2 + 3S^3)^2 = 0,$$

l'expression

$$X = 2(6Sy - T),$$

on aura l'équation

$$(5) \qquad 12Sy^4 - 8Ty^3 - 6S^2y^2 + 6STy - T^2 - \tfrac{1}{4}S^3 = 0,$$

dont les racines auront, avec les racines de l'équation (1), la relation

$$y = \frac{1}{4}\left(x + \frac{S}{x}\right),$$

comme vous l'avez déjà démontré.

En dernier lieu, en supposant $a = 0$, $b = -1$, on a

$$X = \frac{S^3 + 4T^2}{S^2} \frac{1}{y} - 6\frac{T}{S},$$

et on obtiendra l'équation à racines réciproques de l'équation (5).

13 juillet 1863.

CLXXIX.

SUR QUELQUES FORMULES POUR LA MULTIPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES *).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LIX (1864), pp. 769-775.

1. On sait que, en indiquant par $\varphi^2(z)$ un polynôme du troisième degré en z, et en supposant

$$(2n+1)\varphi(\lambda)dz + \varphi(z)d\lambda = 0,$$

on a, entre z et λ, une relation rationnelle du degré $(2n+1)^2$ en z et linéaire par rapport à λ. J'ai trouvé que, en posant

$$a_r = \frac{1}{1.2\ldots(r+1)}\frac{d^{r+1}\varphi(z)}{dz^{r+1}},$$

et

$$H_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad K_n = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots & a_{2n} \end{vmatrix},$$

on déduit du théorème d'ABEL qu'on peut donner à cette équation la forme suivante

$$(z-\lambda)H_n^2 + 2\varphi(z)K_nK_{n-1} = 0.$$

Pour la multiplication d'ordre pair, c'est-à-dire pour l'équation différentielle

$$2n\varphi(\lambda)dz + \varphi(z)d\lambda = 0,$$

*) [Présentée par M. HERMITE].

l'équation correspondante est du degré $(2n)^2$ en z et de la forme

$$(z-\lambda)K_{n-1}^2 + 2\varphi(z)H_n H_{n-1} = 0.$$

Le calcul des quantités a_r conduit, lorsqu'on suppose

$$\varphi(z) = \sqrt{2t + 3sz - z^3},$$

s, t étant des constantes, à un résultat remarquable, parce que ces quantités peuvent, dans ce cas, s'exprimer comme fonctions rationnelles de $\varphi(z)$ et des trois quantités

$$\alpha = z^4 - 6sz^2 - 8tz - 3s^2,$$

$$\beta = z^3 - 3sz - 2t,$$

$$\gamma = z^2 - s,$$

liées par la relation

$$\alpha - 4\beta z + 3\gamma^2 = 0.$$

En effet, on trouve facilement que

$$a_0 = -\frac{3}{2}\frac{\gamma}{\varphi(z)}, \quad a_1 = -\frac{3}{8}\frac{\alpha}{\beta\varphi(z)}, \quad a_2 = \frac{1}{16}\frac{\varepsilon}{\beta^2\varphi(z)},$$

$$a_3 = \frac{3}{128}\frac{3\alpha^2 - 4\gamma\varepsilon}{\beta^3\varphi(z)}, \quad a_4 = -\frac{15}{256}\frac{2\alpha\varepsilon + 9\alpha^2\gamma - 12\gamma^2\varepsilon}{\beta^4\varphi(z)}, \quad \ldots,$$

où l'on a posé

$$\varepsilon = 9\alpha\gamma - 8\beta^2.$$

Ainsi on aura pour la duplication :

$$z - \lambda + 2\varphi a_1 = 0,$$

et en conséquence

$$\lambda = \frac{4z\beta - 3\alpha}{4\beta};$$

pour la triplication :

$$(z-\lambda)a_1^2 + 2\varphi a_2 = 0,$$

et

$$\lambda = \frac{9z\alpha^2 - 8\beta\varepsilon}{9\alpha^2}. \tag{1}$$

Pour la quadruplication et la quintuplication on trouve :

$$(z-\lambda)a_2^2 + 2\varphi a_1(a_1a_3 - a_2^2) = 0,$$

$$(z-\lambda)(a_1a_3 - a_2^2)^2 + 2\varphi a_2(a_2a_4 - a_3^2) = 0,$$

desquelles on déduit:

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{16\chi\beta\varepsilon^2 - 3\alpha(32\beta^2\varepsilon - 27\alpha^3)}{16\beta\varepsilon^2},\\
\lambda &= \frac{(32\beta^2\varepsilon - 27\alpha^3)^2\chi - 24\alpha\beta\varepsilon(36\alpha\gamma\varepsilon - 8\varepsilon^2 - 27\alpha^3)}{(32\beta^2\varepsilon - 27\alpha^3)^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

2. On peut donner à ces équations une autre forme assez remarquable mais irrationnelle, en posant

$$
\Psi(\chi) = \frac{\varphi(\chi) - \varphi(\lambda)}{\chi - \lambda}, \quad A_r = \frac{1}{1.2\ldots(r+1)}\cdot\frac{d^{r+1}\Psi(\chi)}{d\chi^{r+1}}.
$$

Pour la multiplication d'ordre impair $2n+1$, on obtient l'équation:

$$
\begin{vmatrix}
A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\
A_2 & A_3 & \ldots & A_{n+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_n & A_{n+1} & \ldots & A_{2n-1}
\end{vmatrix} = 0,
$$

et pour la multiplication d'ordre pair $2n$ on a:

$$
\begin{vmatrix}
A_0 & A_1 & \ldots & A_{n-1} \\
A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{n-1} & A_n & \ldots & A_{2n-2}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Ces équations sont intéressantes parce qu'on peut tirer d'elles les valeurs de $\Psi(\chi)$. En effet, en observant que

$$
A_r(\chi - \lambda) + A_{r-1} = a_r,
$$

on déduit, pour la multiplication d'ordre impair:

$$
\Psi(\chi) = -\frac{p_0(\chi-\lambda)^n - p_1(\chi-\lambda)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}p_{n-1}(\chi-\lambda) + (-1)^n p_n}{\alpha_1(\chi-\lambda)^{n-1} - \alpha_2(\chi-\lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2}\alpha_{n-1}(\chi-\lambda) + (-1)^{n-1}\alpha_n},
$$

où, en indiquant par Δ le déterminant H_n, on a:

$$
\alpha_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial\Delta}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{\partial\Delta}{\partial a_n},
$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant les éléments de la première ligne du déterminant Δ; et les quantités $p_0, p_1, \dots$ sont données par les relations

$$p_0 = \Delta, \qquad p_r = a_0 \alpha_r + a_1 \alpha_{r+1} + a_2 \alpha_{r+2} + \cdots + a_{n-r} \alpha_n.$$

Semblablement, pour la multiplication d'ordre pair, en posant

$$\nabla = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

et en faisant

$$\alpha_0 = \frac{\partial \nabla}{\partial a_0}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial \nabla}{\partial a_1}, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} = \frac{\partial \nabla}{\partial a_{n-1}},$$

où les $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont les éléments de la première ligne du déterminant ∇, on trouve

$$\Psi(z) = \frac{q_1 (z-\lambda)^{n-1} - q_2 (z-\lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} q_{n-1} (z-\lambda) + (-1)^{n-1} q_n}{\alpha_0 (z-\lambda)^{n-1} - \alpha_1 (z-\lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} \alpha_{n-2} (z-\lambda) + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1}},$$

en prenant

$$q_r = a_0 \alpha_{r-1} + a_1 \alpha_r + a_2 \alpha_{r+1} + \cdots + a_{n-r} \alpha_{n-1}.$$

Ces formules donnent pour la duplication:

$$\Psi(z) = \frac{q_1}{\alpha_0} = a_0,$$

et en conséquence

$$\varphi(z)\Psi(z) = -\tfrac{3}{2}\gamma;$$

pour la triplication:

$$\Psi(z) = a_0 - a_1(z-\lambda),$$

et

$$\varphi(z)\Psi(z) = \frac{3}{8\beta}[\alpha(z-\lambda) - 4\beta\gamma],$$

ou, à cause de l'équation (1):

$$\varphi(z)\Psi(z) = \frac{1}{6\alpha}(9\alpha\gamma - 16\beta^2).$$

Pour la quadruplication on obtient:

$$\Psi(z) = \frac{(a_0 a_2 - a_1^2)(z-\lambda) + a_0 a_1}{a_2(z-\lambda) + a_1},$$

ou, pour l'équation (2):

$$\varphi(z)\Psi(z) = \frac{1}{12\alpha\varepsilon}(18\alpha\gamma\varepsilon - 4\varepsilon^2 - 27\alpha^3).$$

3. Si les constantes s, t sont les invariants d'une forme cubique ternaire $u(x_1, x_2, x_3)$, et si l'on indique par h, k, θ ses covariants du troisième, sixième, neuvième degré, et par conséquent

$$\theta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix},$$

en faisant

$$u_r = \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_r}, \quad h_r = \frac{1}{3}\frac{\partial h}{\partial x_r}, \quad k_r = \frac{1}{3}\frac{\partial k}{\partial x_r},$$

on peut déterminer les valeurs des rapports de trois quantités $y_1 : y_2 : y_3$ qui annulent la fonction $u(y_1, y_2, y_3)$, en supposant $u(x_1, x_2, x_3) = 0$. Ces valeurs, comme je les ai données dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* de la séance du 6 avril 1863 *), peuvent se réduire aux expressions suivantes:

$$(3) \qquad m y_s = U_s - H_s z - \tfrac{1}{3} h K_s[\gamma + \varphi(z)\Psi(z)],$$

z étant une indéterminée, et

$$U_s = \frac{\partial\theta}{\partial u_s}, \quad H_s = \frac{\partial\theta}{\partial h_s}, \quad K_s = \frac{\partial\theta}{\partial k_s}, \quad \lambda = -\frac{6k}{h^2};$$

ou bien, en observant qu'on a identiquement

$$\gamma + \varphi(z)\Psi(z) = -[\varphi(\lambda)\Psi(z) + \lambda z + \lambda^2 - 2s],$$

on aura

$$m y_s = p_s + q_s z + r_s \Psi(z),$$

ayant posé

$$p_s = U_s + \tfrac{1}{3} h K_s(\lambda^2 - 2s), \quad q_s = -H_s + \tfrac{1}{3} h \lambda K_s, \quad r_s = \tfrac{1}{3} h K_s \varphi(\lambda).$$

Or, en indiquant par δy_s, $\delta^2 y_s$, ... les dérivées de y_s par rapport à z, on

*) [CLXXVII: t. IV, pp. 335-340].

obtient, au moyen des formules ci-dessus:

$$m\delta y_s = -H_s + \tfrac{1}{3}bK_s[\lambda + \varphi(\lambda)A_0],$$

$$\tfrac{1}{2}m\delta^2 y_s = \tfrac{1}{3}bK_s\varphi(\lambda)A_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{m}{1.2.3\dots(r+1)}\delta^{r+1}y_s = \frac{1}{3}bK_s\varphi(\lambda)A_r;$$

par conséquent, en posant

$$P_r = \frac{1}{1.2\dots r}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \delta^r y_1 & \delta^r y_2 & \delta^r y_3 \end{vmatrix},$$

$$Q_r = \frac{1}{1.2.3\dots(r+1)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \delta y_1 & \delta y_2 & \delta y_3 \\ \delta^{r+1} y_1 & \delta^{r+1} y_2 & \delta^{r+1} y_3 \end{vmatrix},$$

on trouve:

$$P_r = -\frac{b^2\theta}{3m^2}\varphi(\lambda)A_{r-1}, \quad Q_r = -\frac{b\theta^2}{3m^3}\varphi(\lambda)A_r;$$

d'où l'on déduit que les équations pour la multiplication des fonctions elliptiques peuvent s'exprimer comme il suit:

a) pour la multiplication d'ordre impair:

$$\begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \\ Q_2 & Q_3 & \dots & Q_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_n & Q_{n+1} & \dots & Q_{2n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

b) pour la multiplication d'ordre pair:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ P_2 & P_3 & \dots & P_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n & P_{n+1} & \dots & P_{2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour la duplication on a donc le déterminant $P_1 = 0$, et la valeur correspon-

dante de y_s sera, à cause de l'équation (3):

$$my_s = U_s - H_s z + \tfrac{1}{6} h K_s \gamma. \tag{4}$$

Si x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées de deux points situés sur la ligne du troisième ordre $u = 0$, et l'on suppose que le second de ces points soit un des points de contact des tangentes conduites à la courbe du point $x_1 : x_2 : x_3$, il est évident qu'on a $P_1 = 0$; c'est-à-dire que la recherche de ces tangentes revient à celle de la duplication des fonctions elliptiques, comme M. CLEBSCH a démontré; de plus, les équations (4) donnent les valeurs des coordonnées des quatre points de contact, en substituant au lieu de z les quatre racines de l'équation du quatrième degré obtenue pour la duplication.

La triplication correspond à $Q_1 = 0$, ou à la recherche des points d'inflexion; les coordonnées de ces neuf points sont données par les expressions

$$my_s = U_s - H_s z - \frac{1}{18} h K_s \frac{15\alpha\gamma - 16\beta^2}{\alpha},$$

en posant pour z les neuf racines de l'équation (1).

On obtient aussi facilement que la conique

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial y_3} = 0$$

passe par les quatre points de contact donnés par les équations (4) et touche la courbe au point $x_1 : x_2 : x_3$, comme il est connu; et que les neuf points d'inflexion sont situés sur la courbe

$$h(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Les résultats obtenus ci-dessus ont un grand intérêt dans les recherches sur les formes cubiques ternaires, surtout dans l'étude géométrique de ces formes. Enfin, en se rappelant les deux transformations dues à M. ARONHOLD et à moi, par lesquelles on réduit aux fonctions elliptiques l'expression $\int f(x, y)\,dx$, la fonction f étant rationnelle et les variables x, y liées par une équation du troisième degré, on démontre facilement que la multiplication des transcendantes de cette forme se déduit des formules précédentes.

7 novembre 1864.

CLXXX.

SUR UNE CLASSE DE RÉSOLVANTES DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ *).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXIII (1866), pp. 685-688, 785-788.

I.

Dans mon Mémoire sur la méthode de M. KRONECKER pour la résolution de l'équation du cinquième degré **), j'ai démontré qu'en désignant par $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ une fonction cyclique des racines d'une équation du cinquième degré

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5 = 0,$$

fonction qui se reproduit, changée de signe, lorsqu'on opère sur elle avec la substitution $\begin{pmatrix} r \\ 4r \end{pmatrix}$, si l'on pose

$$\sqrt{z} = \frac{1}{2}\left(\sum \varphi + 2\omega\varphi\right), \tag{1}$$

où le signe $\sum$ représente la somme des fonctions $\varphi, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_4$, qu'on obtient en effectuant sur la première φ les substitutions $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$, s étant $=0, 1, 2, 3, 4$, et $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, on a ce résultat que l'expression z et les cinq autres qu'on en déduit par la substitution précédente $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$ sont les racines d'une équation ayant le même groupe que l'équation modulaire du sixième degré.

*) [Présentée par M. HERMITE].

**) [CXI: t. III, pp. 177-188].

J'ai considéré aussi, dans le travail cité, une fonction φ particulière, c'est-à-dire la fonction

$$v = a_0^2(x_0 - x_2)(x_2 - x_4)(x_4 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_0) = a_0^2(02413),$$

et j'ai calculé les coefficients de l'équation du sixième degré qui sont des invariants de l'équation donnée.

En posant $u = a_0^2(01234)$, on obtient, au moyen de la substitution ci-dessus, les deux systèmes de fonctions:

$$\begin{cases} u\ = a_0^2(01234), & u_0 = a_0^2(03412), \quad u_1 = a_0^2(14023), \\ u_2 = a_0^2(20134), & u_3 = a_0^2(31240), \quad u_4 = a_0^2(42301); \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\ = a_0^2(02413), & v_0 = a_0^2(04231), \quad v_1 = a_0^2(10342), \\ v_2 = a_0^2(21403), & v_3 = a_0^2(32014), \quad v_4 = a_0^2(43120). \end{cases}$$

Ces fonctions ont des propriétés remarquables que je ne ferai que citer, leur démonstration étant très facile. J'observerai auparavant que les deux identités

$$\sum u = 2(u + v), \quad \sum v = 2u$$

donnent lien chacune à cinq autres, en effectuant sur elle la substitution $\binom{r}{3r^3 + s}$. Ensuite, en désignant par δ la racine carrée du discriminant, c'est-à-dire en posant

$$\delta = a_0^4(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)(x_1 - x_2) \times$$
$$\times (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

on vérifiera immédiatement les relations suivantes:

$$uv = u_0 v_0 = \cdots = u_4 v_4 = -\delta,$$
$$u u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 = v v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 = -\delta^3;$$

enfin on démontrera facilement l'identité

$$u u_0 u_1 = v_2 v_3 v_4,$$

et les analogues pour toutes les combinaisons trois à trois des espressions u, v.

Je citerai encore les cinq relations qu'on déduit de

$$u u_1 u_3 + u_0 u_3 u_4 = u u_2 u_4 + u_0 u_1 u_2,$$

par la substitution $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$, et les cinq fonctions $y_0, y_1, \ldots, y_4$ qu'on obtient également de

$$y_0 = u u_1 u_2 + u_0 u_2 u_4 - u u_3 u_4 - u_0 u_1 u_3,$$

et qui sont les racines de l'équation du cinquième degré, considérée par M. HERMITE dans une Lettre à M. BORCHARDT sur l'invariant du dix-huitième degré *).

Cela posé, les sommes des produits trois à trois des expressions u et des expressions v pourront s'écrire:

$$P = u(u_0u_1 + u_0u_2 + u_0u_3 + u_0u_4 + u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4)$$
$$+ v(v_0v_1 + v_0v_2 + v_0v_3 + v_0v_4 + v_1v_2 + v_1v_3 + v_1v_4 + v_2v_3 + v_2v_4 + v_3v_4),$$

ou

$$P = \tfrac{1}{2}u\left[\left(\sum u - u\right)^2 - \sum u^2 + u^2\right] + \tfrac{1}{2}v\left[\left(\sum v - v\right)^2 - \sum v^2 + v^2\right].$$

Mais en posant

$$h = 5^4[4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)(a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2) - (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)^2],$$

invariant du quatrième degré de l'équation donnée, à un facteur numérique près, on trouve:

$$\sum u^2 = h - 3\delta, \quad \sum v^2 = h + 3\delta;$$

en conséquence l'expression ci-dessus deviendra

$$P = u^3 + v^3 - \tfrac{1}{2}(h + 5\delta)u - \tfrac{1}{2}(h + 3\delta)v.$$

Or, ayant identiquement

$$\sum u^3 = \tfrac{3}{2}\sum u \sum u^2 - \tfrac{1}{2}\left(\sum u\right)^3 + 3P,$$

on déduira des relations précédentes:

$$\sum u^3 = -u^3 - v^3 + \tfrac{3}{2}(h - 3\delta)u + \tfrac{3}{2}(h - \delta)v,$$

$$\sum v^3 = -u^3 + 3v^3 + \tfrac{3}{2}(h + \delta)u - \tfrac{3}{2}(h + 3\delta)v,$$

ainsi que celles qu'on obtiendra par la substitution $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$.

---

*) HERMITE, *Sur l'invariant du 18me ordre des formes du cinquième degré et sur le rôle qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LIX (1861), pp. 304-305].

D'une manière analogue, en observant que

$$\sum u^4 = \tfrac{1}{2}(h^2 - 10h\delta + 13\delta^2), \quad \sum v^4 = \tfrac{1}{2}(h^2 + 10h\delta + 13\delta^2),$$

et que, par les propriétés exposées, on démontre que la somme des produits cinq à cinq des quantités u est égale a $2\delta^2 u$, et la somme analogue des quantités v est égale à $2\delta^2(u+v)$, on vérifiera facilement les relations

$$\sum u^5 = 2u^5 + 2v^5 - \tfrac{5}{2}(h - 3\delta)u^3 - \tfrac{5}{2}(h+\delta)v^3$$
$$+ \tfrac{5}{4}(h-3\delta)^2 u + \tfrac{5}{4}(h-3\delta)(h-\delta)v,$$

$$\sum v^5 = 2u^5 - \tfrac{5}{2}(h-\delta)u^3 + \tfrac{5}{2}(h+3\delta)v^3 + \tfrac{5}{4}(h+3\delta)(h+\delta)u - \tfrac{5}{4}(h+3\delta)^2 v.$$

Enfin, si l'on désigne par k l'invariant du douzième degré qui s'obtient en sommant les produits trois à trois des carrés des fonctions u ou v, on a cette conséquence que les quantités $u, u_0, \ldots, u_4$ sont les racines de l'équation

$$u^{12} - (h-3\delta)u^{10} + \tfrac{1}{4}[(h-\delta)^2 + 4\delta^2]u^8 - ku^6$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(h+\delta)^2 + 4\delta^2]\delta^2 u^4 - (h+3\delta)\delta^4 u^2 + \delta^6 = 0.$$

En multipliant cette équation par v^{12}, on obtient celle dont les racines sont v, $v_0, \ldots, v_4$, c'est-à-dire

$$v^{12} - (h+3\delta)v^{10} + \tfrac{1}{4}[(h+\delta)^2 + 4\delta^2]v^8 - kv^6$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(h-\delta)^2 + 4\delta^2]\delta^2 v^4 - (h-3\delta)\delta^4 v^2 + \delta^6 = 0;$$

et en multipliant les deux précédentes par v^5, u^5, on démontre que

$$u^7 = (h-3\delta)u^5 - \tfrac{1}{4}[(h-\delta)^2 + 4\delta^2]u^3 + ku$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(h+\delta)^2 + 4\delta^2]\delta v - (h+3\delta)\delta v^3 + \delta v^5,$$

$$v^7 = (h+3\delta)v^5 - \tfrac{1}{4}[(h+\delta)^2 + 4\delta^2]v^3 + kv$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(h-\delta)^2 + 4\delta^2]\delta u - (h-3\delta)\delta u^3 + \delta u^5,$$

ou bien que toutes les puissances impaires des quantités u, v supérieures à la cinquième peuvent s'exprimer linéairement par les fonctions u, v; u^3, v^3; u^5, v^5. Par conséquent, si l'on veut considérer le système des résolvantes de l'équation du cinquième degré, dont les racines sont des fonctions linéaires des expressions u, v et de leurs puissances

impaires, on pourra poser avec la plus grande généralité

$$\varphi = a u^5 + b v^5 + c u^3 + d v^3 + e u + f v,$$

a, b, c, ... étant des coefficients indéterminés.

II.

Je supposerai d'abord

$$\varphi = a u + b v,$$

et l'expression générale (1) des racines de la résolvante deviendra dans ce cas:

$$\sqrt{z} = (a + b + a\omega)u + (a + b\omega)v;$$

mais en posant

$$a + b\omega = p,$$

on obtient:

$$a + b + a\omega = (1 + \omega)p;$$

en conséquence, on aura:

$$\sqrt{z} = p[(1 + \omega)u + v].$$

Si l'on pose $p = \omega$, on a l'expression $\sqrt{z} = u + \omega v$, que j'ai considérée dans le Mémoire cité. L'équation en z est, comme on sait, de la forme

$$(2)\quad (z - A)^6 - 4A(z - A)^5 + 10B(z - A)^3 - 4C(z - A) + 5B^2 - 4AC = 0,$$

et, en posant

$$h + 5\delta\sqrt{5} = 2\lambda\sqrt{5},\quad h - 5\delta\sqrt{5} = 2\mu\sqrt{5},\quad h^3 + 75h\delta^2 - 50k = 10\nu\sqrt{5},$$

on a pour A, B, C les valeurs suivantes:

$$5A = \omega(\lambda + 4\mu),\quad 5B = \omega^3(\lambda^2\mu + \nu),\quad 16C = \omega^5\lambda^2\nu.$$

Le second cas à considérer correspond à la fonction

$$\varphi = a u^3 + b v^3 + c u + d v,$$

qui donne

$$\begin{aligned}\sqrt{z} = &-\tfrac{1}{2}(a + b - 2\omega a)u^3 - \tfrac{1}{2}(a - 3b - 2\omega b)v^3 \\ &+ \tfrac{1}{4}[3(h - 3\delta)a + 3(h + \delta)b + 4c + 4d + 4\omega c]u \\ &+ \tfrac{1}{4}[3(h - \delta)a - 3(h + 3\delta)b + 4c + 4\omega d]v.\end{aligned}$$

Or, en posant

$$a + b - 2\omega a = -2p,$$

on en déduit:

$$a - 3b - 2\omega b = 2p(2\omega + 3);$$

et si l'on suppose

$$4c = 3(c_1 h + c_2 \delta), \quad 4d = 3(d_1 h + d_2 \delta),$$

en désignant par p_1, p_2 les expressions

$$a - b + c_1 + \omega d_1, \quad -a - 3b + c_2 + \omega d_2,$$

on trouve très facilement les relations:

$$a + b + c_1 + d_1 + \omega c_1 = (\omega + 1)[p_1 - 2p(\omega + 1)],$$

$$-3a + b + c_2 + d_2 + \omega c_2 = (\omega + 1)[p_2 - 2p(\omega + 1)\sqrt{5}],$$

et, en substituant, on aura:

$$\sqrt{z} = p[u^3 - (2\omega + 3)v^3] + \tfrac{3}{4}(p_1 h + p_2 \delta)v$$
$$+ \tfrac{3}{4}(\omega + 1)[p_1 h + p_2 \delta - 2p(\omega + 1)(h + \delta\sqrt{5})]u,$$

ou, en posant $3(p_1 h + p_2 \delta) = 4q_1$,

$$\sqrt{z} = p\left[u^3 - (2\omega + 3)v^3 - \tfrac{3}{2}(\omega + 2)(h + \delta\sqrt{5})u\right] + q_1[(1 + \omega)u + v].$$

L'expression la plus générale du troisième degré en u, v contient donc une indéterminée au moyen de laquelle on pourra réduire à zéro le coefficient A du second terme de l'équation (2).

Si l'on fait

$$q_1 = \tfrac{1}{2}p[(2\omega + 3)h + (2\omega + 5)\delta] + q,$$

l'expression précédente se transforme dans celle-ci:

$$\sqrt{z} = p\left[u^3 - \tfrac{1}{2}hu + \tfrac{1}{2}\delta u + \delta v - (2\omega + 3)\left(v^3 - \tfrac{1}{2}hv - \tfrac{1}{2}\delta v + \delta u\right)\right]$$
$$+ q[(1 + \omega)u + v],$$

qui, en posant $-\omega p$ au lieu de p, $2q\delta$ au lieu de q, est identique à la fonction considérée par M. HERMITE dans son récent Mémoire sur l'équation du cinquième degré *). De cette dernière fonction on déduit très facilement la valeur de

---

*) HERMITE, *Sur l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXI (1865), pp. 877-882, 965-972, 1073-1081; t. LXII (1866), pp. 65-72, 157-162, 245-253, 715-722, 919 924, 959-966, 1054-1059, 1161-1167, 1213-1215].

$$\sum z = (\omega + 1)[p^2(6k\sqrt{5} + 5h^2\delta + 28h\delta^2\sqrt{5} + 35\delta^3)$$
$$+ 8pq\delta^2(3h\sqrt{5} - 5\delta) + 4q^2\delta^2(h\sqrt{5} - 15\delta)],$$

et en changeant q en $q - 2p$ on retrouve, pour déterminer le rapport $p:q$, l'équation du second degré déjà calculée par M. HERMITE :

$$p^2(6k + h^2\delta\sqrt{5} - 4h\delta^2 - 25\delta^3\sqrt{5}) + 8pq\delta^2(h + 5\delta\sqrt{5}) + 4q^2\delta^2(h - 3\delta\sqrt{5}) = 0.$$

Considérons maintenant les expressions du cinquième degré :

$$(3) \qquad \varphi = au^5 + bv^5 + cu^3 + dv^3 + eu + fv.$$

En suivant la méthode exposée ci dessus pour les fonctions du troisième degré, on obtient :

$$\sqrt{z} = p\left[(1+\omega)u^5 + v^5 - \tfrac{5}{2}(\omega+2)(h - \delta\sqrt{5})v^3 - \tfrac{5}{4}(2\omega+3)(h - 3\delta)(h + \delta\sqrt{5})u\right]$$
$$+ q_1\left[u^3 - (2\omega+3)v^3 - \tfrac{3}{2}(\omega+2)(h + \delta\sqrt{5})u\right] + r_1[(1+\omega)u + v].$$

Or on a démontré que toute expression linéaire de u, de v et de leurs puissances impaires se réduit à (3); donc la valeur de $\sqrt{z}$ correspondante à la plus générale des fonctions φ contient deux indéterminées. On peut simplifier l'expression précédente en posant

$$q_1 = \tfrac{5}{2}[(1-\omega)h + (1+\omega)\delta]p + q,$$

$$r_1 = \tfrac{5}{4}[(1+2\omega)h^2 + 10(1+\omega)h\delta + \delta^2]p + \tfrac{1}{2}[(2\omega+3)h + (2\omega+5)\delta]q + r,$$

et l'on obtient

$$\sqrt{z} = p\left[(1+\omega)\left(u^5 + \tfrac{5}{2}\delta u^3 - \tfrac{5}{2}hu^3 - 5hv^3 - \tfrac{5}{4}h^2u + \tfrac{5}{2}h^2v + \tfrac{25}{2}h\delta v + \tfrac{5}{4}\delta^2 u\right)\right.$$
$$\left. + v^5 - \tfrac{5}{2}\delta v^3 - \tfrac{5}{2}hv^3 + 5hu^3 - \tfrac{5}{4}h^2v - \tfrac{5}{2}h^2u + \tfrac{25}{2}h\delta u + \tfrac{5}{4}\delta^2 v\right]$$
$$+ q\left[u^3 - \tfrac{1}{2}hu + \tfrac{1}{2}\delta u + \delta v - (2\omega+3)\left(v^3 - \tfrac{1}{2}hv - \tfrac{1}{2}\delta v + \delta u\right)\right]$$
$$+ r[(1+\omega)u + v].$$

Je montrerai dans une autre occasion le parti qu'on peut tirer de cette résolvante dans la résolution de l'équation du cinquième degré; mais j'observerai maintenant que l'existence des résolvantes dont les racines peuvent contenir deux indéterminées se dé-

montre tout de suite en observant que l'expression

$$p\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial A}+q\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial B}+r\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial C},$$

où p, q, r sont trois indéterminées, peut être racine d'une équation de la forme (2).

22 octobre, 5 novembre 1866.

CLXXXI.

SUR UNE TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS *).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVI (1868), pp. 710-714.

Soient m, m_1, m_2 les masses des trois corps; ρ, ρ_1, ρ_2 les distances des masses $m_1 m_2$, $m_2 m$, $m m_1$; x, y, z; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de deux points par rapport à trois axes passant par le centre de gravité du système que l'on peut supposer en repos. JACOBI a démontré que, en désignant par U la fonction des forces

$$U = \frac{m_1 m_2}{\rho} + \frac{m_2 m}{\rho_1} + \frac{m m_1}{\rho_2},$$

on peut donner aux équations différentielles du problème des trois corps la forme suivante:

$$\mu x'' = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu y'' = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu z'' = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\mu x_1'' = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \mu y_1'' = \frac{\partial U}{\partial y_1}, \quad \mu z_1'' = \frac{\partial U}{\partial z_1}.$$

Je suppose que le plan xy soit le plan invariable du système, et en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, \quad x x_1 + y y_1 + z z_1 = r r_1 \cos\omega,$$

je substitue aux variables x, y, ... les variables r, r_1, u, u_1, ... données par les re-

*) [Présentée par M. BERTRAND].

lations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x = ru, \quad y = rv, \quad z = rw; \quad x_1 = r_1 u_1, \quad y_1 = r_1 v_1, \quad z_1 = r_1 w_1; \\ u^2 + v^2 + w^2 = 1, \quad u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 1, \quad uu_1 + vv_1 + ww_1 = \cos\omega. \end{array}\right.$$

Or il est évident que si l'on désigne par u_2, v_2, w_2 les cosinus des angles que la normale à la position actuelle du plan des trois corps forme avec les trois axes rectangulaires, on aura

$$(2)\quad u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 1, \quad uu_2 + vv_2 + ww_2 = 0, \quad u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = 0.$$

Cela posé, si l'on considère un second système d'axes rectangulaires X, Y, Z, ayant l'origine au centre de gravité et mobile dans l'espace, et si l'on suppose que le plan des XY soit le plan des trois corps à la fin du temps t, on pourra exprimer les valeurs des neuf cosinus

X	Y	Z	
α	β	γ	x
α_1	β_1	γ_1	y
α_2	β_2	γ_2	z

en fonction de trois angles φ, ψ, θ au moyen des formules d'Euler:

$$\alpha = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \quad \beta = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,$$

$$\alpha_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \quad \beta_1 = -\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,$$

$$\alpha_2 = \sin\varphi\sin\theta, \qquad \beta_2 = \cos\varphi\sin\theta,$$

$$\gamma = \sin\psi\sin\theta.$$

$$\gamma_1 = -\cos\psi\sin\theta,$$

$$\gamma_2 = \cos\theta,$$

et θ sera l'angle que le plan des trois corps comprend avec le plan invariable; ψ, φ les angles que l'intersection de ces deux plans forme avec les axes des x et des X. Or les relations supérieures entre les u, v, ... étant satisfaites en posant

$$u = \alpha\cos\tfrac{1}{2}\omega + \beta\sin\tfrac{1}{2}\omega, \quad v = \alpha_1\cos\tfrac{1}{2}\omega + \beta_1\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

$$u_1 = \alpha\cos\tfrac{1}{2}\omega - \beta\sin\tfrac{1}{2}\omega, \quad v_1 = \alpha_1\cos\tfrac{1}{2}\omega - \beta_1\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

$$u_2 = \gamma, \qquad v_2 = \gamma_1,$$

$$w = \alpha_2 \cos \tfrac{1}{2}\omega + \beta_2 \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

$$w_1 = \alpha_2 \cos \tfrac{1}{2}\omega - \beta_2 \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

$$w_2 = \gamma_2,$$

on pourra substituer aux variables $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ les nouvelles variables $r, r_1, \omega, \psi, \varphi, \theta$; ou, si l'on fait $\varphi + \frac{1}{2}\omega = \varepsilon$, $\varphi - \frac{1}{2}\omega = \varepsilon_1$, les variables $r, r_1, \varepsilon, \varepsilon_1, \psi, \theta$. Dans ce cas, les valeurs de $u, u_1, \ldots$ seront

$$u = \cos\psi \cos\varepsilon - \sin\psi \sin\varepsilon \cos\theta, \quad v = \sin\psi \cos\varepsilon + \cos\psi \sin\varepsilon \cos\theta,$$

$$u_1 = \cos\psi \cos\varepsilon_1 - \sin\psi \sin\varepsilon_1 \cos\theta, \quad v_1 = \sin\psi \cos\varepsilon_1 + \cos\psi \sin\varepsilon_1 \cos\theta,$$

$$u_2 = \sin\psi \sin\theta, \quad v_2 = -\cos\psi \sin\theta,$$

$$w = \sin\theta \sin\varepsilon,$$

$$w_1 = \sin\theta \sin\varepsilon_1,$$

$$w_2 = \cos\theta.$$

Soient l, m, n les vitesses angulaires autour des axes mobiles; on a, comme il est connu:

$$l = \gamma\beta' + \gamma_1\beta_1' + \gamma_2\beta_2', \quad m = \alpha\gamma' + \alpha_1\gamma_1' + \alpha_2\gamma_2', \quad n = \beta\alpha' + \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2',$$

et

$$\alpha' = \beta n - \gamma m, \quad \beta' = \gamma l - \alpha n, \quad \gamma' = \alpha m - \beta l, \quad \alpha_1' = \beta_1 n - \gamma_1 m, \ldots.$$

De ces relations et des équations (1) et (2) on déduit, pour la demi-somme des forces vives

$$T = \tfrac{1}{2}[\mu(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \mu_1(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)],$$

l'expression

$$T = \tfrac{1}{2}\Big\{\mu r'^2 + \mu_1 r_1'^2 + \mu r^2\Big[\big(n + \tfrac{1}{2}\omega'\big)^2 + \big(l \sin\tfrac{1}{2}\omega - m\cos\tfrac{1}{2}\omega\big)^2\Big]$$

$$+ \mu_1 r_1^2\Big[\big(n - \tfrac{1}{2}\omega'\big)^2 + \big(l \sin\tfrac{1}{2}\omega + m\cos\tfrac{1}{2}\omega\big)^2\Big]\Big\},$$

et les quatre intégrales connues du problème des trois corps seront

$$(3) \qquad T - U = h, \quad \frac{\partial T}{\partial l} = k\alpha_2, \quad \frac{\partial T}{\partial m} = k\beta_2, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = k\gamma_2,$$

h, k étant les deux constantes.

Or, en posant

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = p, \quad \frac{\partial T}{\partial r_1'} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega'} = q,$$

et en substituant dans la valeur de T pour r', r'_1, ω', l, m, n les valeurs qu'on obtient de ces équations et des dernières équations (3), on a, après quelques réductions:

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}p^2 + \frac{1}{\mu_1}p_1^2 + \frac{1}{\mu r^2}\left(q + \frac{1}{2}k\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{\mu_1 r_1^2}\left(q - \frac{1}{2}k\cos\theta\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{k^2\sin^2\theta}{\mu\mu_1 r^2 r_1^2 \sin^2\omega}(\mu r^2 \sin^2\varepsilon + \mu_1 r_1^2 \sin^2\varepsilon_1)\right].$$

On en déduit par la méthode d'HAMILTON les six équations différentielles suivantes:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial(T-U)}{\partial p}, \quad \frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial(T-U)}{\partial p_1}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial(T-U)}{\partial q},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial r}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial r_1}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial \omega},$$

ou

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{\mu}p, \quad \dfrac{dr_1}{dt} = \dfrac{1}{\mu_1}p_1, \quad \dfrac{d\omega}{dt} = \left(\dfrac{1}{\mu r^2} + \dfrac{1}{\mu_1 r_1^2}\right)q + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mu r^2} - \dfrac{1}{\mu_1 r_1^2}\right)k\cos\theta, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{\mu r^3}\left(q + \dfrac{1}{2}k\cos\theta\right)^2 + \dfrac{k^2\sin^2\theta\sin^2\varepsilon_1}{\mu r^3\sin^2\omega}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial r_1} + \dfrac{1}{\mu_1 r_1^3}\left(q - \dfrac{1}{2}k\cos\theta\right)^2 + \dfrac{k^2\sin^2\theta\sin^2\varepsilon}{\mu_1 r_1^3\sin^2\omega}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \omega} + \dfrac{k^2\sin^2\theta}{2\mu\mu_1 r^2 r_1^2 \sin^3\omega}[(\mu r^2\sin^2\varepsilon + \mu_1 r_1^2\sin^2\varepsilon_1)\cos\omega \\ \qquad\qquad + (\mu r^2 + \mu_1 r_1^2)\sin\varepsilon\sin\varepsilon_1]. \end{cases}$$

A ces équations on doit évidemment adjoindre les trois dernières équations (3), lesquelles, en substituant pour l, m, n les valeurs

$$l = \psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi, \quad m = \psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi, \quad n = \psi'\cos\theta + \varphi',$$

fournies par les formules d'EULER, donnent:

$$(5)\quad \begin{cases} \psi' = \dfrac{k}{\mu\mu_1 r^2 r_1^2 \sin^2\omega}(\mu r^2\sin^2\varepsilon + \mu_1 r_1^2 \sin^2\varepsilon_1), \\ \theta' = \dfrac{k\sin\theta}{\mu\mu_1 r^2 r_1^2\sin^2\omega}(\mu r^2 \sin\varepsilon\cos\varepsilon + \mu_1 r_1^2 \sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1), \\ \varphi' = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\mu r^2} + \dfrac{1}{\mu_1 r_1^2}\right)k\cos\theta + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mu r^2} - \dfrac{1}{\mu_1 r_1^2}\right)q - \psi'\cos\theta. \end{cases}$$

Les équations différentielles du problème des trois corps sont par conséquent les six équations (4) et les trois (5). Mais l'intégration de la première des équations (5) se fait par une quadrature lorsqu'on connaît les valeurs de r, r_1, ω, φ, c'est-à-dire après avoir intégré le système des autres huit équations. Enfin, on a une intégrale de ce système, l'intégrale des forces vives $T - U = h$, ce qui réduit à sept le nombre des équations à intégrer, comme dans la transformation de JACOBI.

On pourrait encore, en posant

$$\tfrac{1}{2}k\cos\theta + q = s, \quad \tfrac{1}{2}k\cos\theta - q = s_1,$$

et par conséquent

$$k\cos\theta = s + s_1,$$

substituer au système des huit équations supérieures le suivant:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s_1},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r_1}, \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{ds_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1},$$

où $H = T - U$ et

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}p^2 + \frac{1}{\mu_1}p_1^2 + \frac{1}{\mu r^2}s^2 + \frac{1}{\mu_1 r_1^2}s_1^2 + \frac{k^2 - (s+s_1)^2}{\mu\mu_1 r^2 r_1^2 \sin^2\omega}(\mu r^2 \sin^2\varepsilon + \mu_1 r_1^2 \sin^2\varepsilon_1)\right].$$

Les huit variables r, r_1, ε, ε_1; p, p_1, s, s_1 sont alors celles que BOUR a trouvées, en partant des formules de M. BERTRAND, par une analyse très remarquable mais assez compliquée dans son *Mémoire sur le problème des trois corps*, publié dans le trente-sixième cahier du « Journal de l'École Polytechnique » [t. XXI (1856), pp. 35-58].

6 avril 1868.

CLXXXII.

SUR LES FONCTIONS DE STURM *).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVIII (1869), pp. 1318-1321.

Dans une Note publiée en 1856: *Sur les séries qui donnent le nombre des racines réelles des équations algébriques à une ou à plusieurs inconnues* **), j'ai démontré le théorème suivant:

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines d'une équation $f(x)=0$; $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ n fonctions rationnelles entières de x; $\omega(x)$, $\theta(x)$ deux polynômes, et a un nombre entier impair positif ou négatif. En considérant la forme quadratique à coefficients réels

$$(A) \qquad \sum^m (x-x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} U_m^2 = \sum^r \sum^s A_{rs} u_r u_s,$$

où

$$U_m = u_1 \psi_1(x_m) + u_2 \psi_2(x_m) + \cdots + u_n \psi_n(x_m),$$

$$A_{rs} = \sum^m (x-x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \psi_r(x_m) \psi_s(x_m),$$

et en posant

$$\Delta_r = \sum (\pm A_{11} A_{22} \ldots A_{rr}),$$

on voit que, pour une valeur réelle h de x, le nombre des signes positifs dans la suite

$$(B) \qquad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

*) [Présentée par M. SERRET].

**) [Nouvelles Annales de Mathématiques, t. XV (1856), pp. 264-286].

représente le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$ augmenté du nombre des racines réelles moindre que h. Le nombre des signes négatifs est égal au nombre des couples de racines imaginaires, plus le nombre des racines réelles supérieures à h.

Dans ce théorème on suppose que le rapport $\omega(x) : \theta(x)$ soit positif pour toutes les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$. En indiquant avec γ le nombre des racines complexes, δ_1, δ_2 ceux des racines réelles inférieures ou supérieures à h, on a donc:

$$\gamma + \delta_1 = M, \qquad \gamma + \delta_2 = N,$$

M, N étant les nombres des signes positifs ou négatifs dans la suite (B) pour $x=h$.

Mais si l'on suppose que le rapport $\omega(x) : \theta(x)$ soit positif pour α racines réelles, et négatif pour les autres β; de plus, que de ces α racines, α_1 soient inférieures à h et α_2 supérieures, et semblablement β_1, β_2 pour les β racines, on aura:

$$\gamma + \alpha_1 + \beta_2 = M, \qquad \gamma + \alpha_2 + \beta_1 = N;$$

enfin si, dans l'équation (A), on suppose $a = 0$, on a évidemment:

$$\gamma + \alpha = M, \qquad \gamma + \beta = N.$$

Parmi les applications qu'on peut faire de ce théorème, il en est une, sans doute très intéressante, celle qui a été récemment l'objet d'une communication de M. KRONECKER *) à cette Académie des Sciences. Je rappellerai à ce propos quelques relations trouvées en 1853, 1854 par M. SYLVESTER **) et par moi ***) entre les résidus, les dénominateurs des réduites, etc., qu'on obtient de la division de deux polynômes.

En posant, avec M. KRONECKER,

$$f(x) = Q_1(x) f_1(x) - f_2(x), \qquad f_1(x) = Q_2(x) f_2(x) - f_3(x), \qquad \ldots,$$

où

$$Q_r(x) = A_r x + B_r,$$

et en désignant par $D_1(x)$, $D_2(x)$, ... les dénominateurs des réduites de la fraction

*) KRONECKER, *Sur le théorème de* STURM [Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences, t. LXVIII (1869), pp. 1078-1082].

**) SYLVESTER, *On a Theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of* STURM'*s functions, and that of the greatest algebraical common measure* [Philosophical Transactions, 1853, pp. 407-576].

***) BRIOSCHI, *Sur les fonctions de* STURM [Nouvelles Annales de Mathématiques, t. XIII (1854), pp. 71-80]. Vedi anche: *Sur quelques questions d'Algèbre supérieure* [XX: t. I, pp. 127-142].

continue

$$\cfrac{1}{Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cfrac{1}{Q_3 - \cdot}}}$$

les relations que j'ai citées sont les suivantes:

$$\sum_m D_s(x_m)\frac{f_1(x_m)}{f'(x_m)} = 0, \qquad \sum_m D_s(x_m) D_r(x_m) \frac{f_1(x_m)}{f'(x_m)} = 0,$$

$$\sum_m \frac{f_1(x_m)}{f'(x_m)} = \frac{1}{A_1}, \qquad \sum_m D_s^2(x_m)\frac{f_1(x_m)}{f'(x_m)} = \frac{1}{A_{s+1}},$$

desquelles, en observant que

$$f_{s+1}(x_m) = f_1(x_m) D_s(x_m),$$

on déduit les équations II, IV de M. KRONECKER.

Or si, dans l'équation (A), on pose

$$a = 0, \quad \psi_1 = 1, \quad \psi_2 = D_1, \ldots, \psi_n = D_{n-1}, \quad \omega(x) = f_1(x), \quad \theta(x) = f'(x),$$
$$U_m f_1(x_m) = u_1 f_1(x_m) + u_2 f_2(x_m) + \cdots + u_n f_n(x_m) = z_m,$$

on a, en conséquence des relations précédentes:

$$A_{rr} = \frac{1}{A_r}, \qquad A_{rs} = 0,$$

et l'équation (A) devient:

$$\sum_m \frac{z_m^2}{f_1(x_m) f'(x_m)} = \sum_m \frac{1}{A_m} u_m^2,$$

ou l'équation III de M. KRONECKER. Enfin, la série (B) étant dans ce cas

$$\frac{1}{A_1}, \quad \frac{1}{A_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{A_n},$$

les nombres M, N des relations

$$\gamma + \alpha = M, \qquad \gamma + \beta = N$$

sont les nombres des quantités positives A ou des quantités négatives. Si au lieu de supposer $a = 0$ on fait $a = 1$, on arrive à un résultat aussi remarquable que le pré-

cédent. En effet, dans cette hypothèse, on a:

$$A_{rr} = \frac{Q_r}{A_r^2}, \qquad A_{r,r+1} = A_{r+1,r} = \frac{-1}{A_r A_{r+1}},$$

et les autres coefficients A_{rs} égaux à zéro; par conséquent et par une propriété connue des dénominateurs D, on a:

$$\Delta_r = \frac{D_r(x)}{A_1^2 A_2^2 \ldots A_r^2},$$

et l'on pourra substituer à la série (B) la suivante:

$$D_1(x), \qquad \frac{D_2(x)}{D_1(x)}, \quad \frac{D_3(x)}{D_2(x)}, \qquad \ldots, \qquad \frac{f(x)}{D_{n-1}(x)}.$$

En dernier lieu, en posant $a = -1$, on trouve par un calcul très simple:

$$\Delta_r = \frac{f_r(x)}{f(x)},$$

et la série (B) deviendra:

$$\frac{f_1(x)}{f(x)}, \qquad \frac{f_2(x)}{f_1(x)}, \quad \frac{f_3(x)}{f_2(x)}, \qquad \ldots, \qquad \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}.$$

7 juin 1869.

CLXXXIII.

SUR LA BISSECTION DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES *).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXX (1870), pp. 504-506.

Soient:

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p), \qquad \Delta(x) = \sqrt{P(x)\,Q(x)},$$

$$Q(x) = A(x - a_{p+1})(x - a_{p+2}) \dots (x - a_{2p+1}),$$

et posons:

$$u_r = \frac{1}{2}\sum_1^p{}^i \int_{a_i}^{x_i} \frac{P(x)}{(x - a_r)\Delta(x)}\,dx, \qquad v_r = \frac{1}{2}\sum_1^p{}^i \int_{a_i}^{y_i} \frac{P(x)}{(x - a_r)\Delta(x)}\,dx,$$

et:

$$n u_1 + v_1 \equiv 0, \qquad n u_2 + v_2 \equiv 0, \qquad \dots, \qquad n u_p + v_p \equiv 0.$$

On sait que l'équation qui donne la valeur des x, ou l'équation de la division, est du degré n^{2p}. Je vais démontrer que, *dans le cas de la bissection, on n'aura effectivement à résoudre qu'une équation de degré p*. En effet, si l'on pose

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p), \qquad \psi(x) = (x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_p),$$

le théorème d'Abel nous donne:

$$F^2(x)P(x) - f^2(x)Q(x) = \varphi^2(x)\psi(x), \tag{1}$$

*) [Présentée par M. Hermite].

$F(x)$, $f(x)$ étant deux polynômes des degrés p, $p-1$; et l'équation (1) conduit très facilement aux trois relations suivantes:

$$F(a_s)\sqrt{P(a_s)} = \varphi(a_s)\sqrt{\psi(a_s)}, \qquad (r, i = 1, 2, 3, \ldots, p), \tag{2}$$

$$f(a_r)\sqrt{-Q(a_r)} = \varphi(a_r)\sqrt{\psi(a_r)}, \qquad (s = p+1, p+2, \ldots, 2p+1), \tag{3}$$

$$F(y_i)\sqrt{P(y_i)} = f(y_i)\sqrt{Q(y_i)}. \tag{4}$$

Or, en désignant par θ_s, θ_r les expressions

$$\theta_s = \sqrt{\frac{\varphi(a_s)}{P(a_s)}}, \qquad \theta_r = \sqrt{\frac{\varphi(a_r)}{-Q(a_r)}},$$

et semblablement par ω_s, ω_r celles qu'on obtient de θ_s, θ_r en substituant ψ à φ, on conclura, à cause des relations connues:

$$\frac{\varphi(a_s)}{P(a_s)} = 1 + \sum^r \frac{\varphi(a_r)}{(a_s - a_r)P'(a_r)}, \qquad \frac{\varphi(a_r)}{P(a_r)} = \sum^s \frac{\varphi(a_s)}{(a_r - a_s)Q'(a_s)},$$

que:

$$\theta_s^2 = 1 - \sum^r \frac{Q(a_r)}{(a_s - a_r)P'(a_r)}\theta_r^2, \qquad \theta_r^2 = -\sum^s \frac{P(a_s)}{(a_r - a_s)Q'(a_s)}\theta_s^2, \tag{5}$$

et des relations (2), (3) on déduira les suivantes:

$$\theta_s^2\omega_s = \frac{F(a_s)}{P(a_s)}, \qquad \theta_r^2\omega_r = -\frac{f(a_r)}{Q(a_r)}. \tag{6}$$

Mais l'équation (4) peut prendre l'une ou l'autre des deux formes

$$F(y_i) = \Delta(y_i)\frac{f(y_i)}{P(y_i)}, \qquad f(y_i) = \Delta(y_i)\frac{F(y_i)}{Q(y_i)},$$

et celles-ci, en observant que

$$\frac{F(y_i)}{Q(y_i)} = \sum^s \frac{F(a_s)}{(y_i - a_s)Q'(a_s)}, \qquad \frac{f(y_i)}{P(y_i)} = \sum^r \frac{f(a_r)}{(y_i - a_r)P'(a_r)},$$

savoir

$$\sum^i \frac{F(y_i)}{(y_i - a_s)\psi'(y_i)} = 1 - \frac{F(a_s)}{\psi(a_s)}, \qquad \sum^i \frac{f(y_i)}{(y_i - a_r)\psi'(y_i)} = -\frac{f(a_r)}{\psi(a_r)},$$

nous donnent:

$$1 - \frac{F(a_s)}{\psi(a_s)} = \sum^r \frac{f(a_r)}{P'(a_r)} \sum^i \frac{\Delta(y_i)}{(y_i - a_r)(y_i - a_s)\psi'(y_i)},$$

$$-\frac{f(a_r)}{\psi(a_r)} = \sum^s \frac{F(a_s)}{Q'(a_s)} \sum^i \frac{\Delta(y_i)}{(y_i - a_r)(y_i - a_s)\psi'(y_i)};$$

par conséquent, si l'on pose

$$\omega_{rs} = \omega_r \omega_s \sum^i \frac{\Delta(y_i)}{(y_i - a_r)(y_i - a_s)\psi'(y_i)},$$

on aura, à cause des équations (6), les deux suivantes:

$$\theta_s^2 = \omega_s + \sum^r \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} \theta_r^2 \omega_{rs}, \qquad \theta_r^2 = - \sum^s \frac{P(a_s)}{Q'(a_s)} \theta_s^2 \omega_{rs}.$$

Enfin, en substituant dans la seconde de ces dernières la valeur de θ_r^2 donnée par la seconde des équations (5), on obtient:

$$\sum^s \frac{P(a_s)}{Q'(a_s)} a_{rs} \theta_s^2 = 0, \tag{7}$$

ayant posé

$$a_{rs} = \frac{1}{a_s - a_r} + \omega_{rs}.$$

L'équation (7) donne évidemment p relations linéaires entre $\theta_{p+1}^2, \theta_{p+2}^2, \ldots, \theta_{2p+1}^2$; si l'on y joint la relation

$$\sum^s \frac{\varphi(a_s)}{(x_i - a_s) Q'(a_s)} = \sum^s \frac{P(a_s)}{(x_i - a_s) Q'(a_s)} \theta_s^2 = 0,$$

nous en déduirons, par l'élimination, l'équation du degré p

$$\begin{vmatrix} a_{1,p+1} & a_{1,p+2} & \ldots & a_{1,2p+1} \\ a_{2,p+1} & a_{2,p+2} & \ldots & a_{2,2p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,p+1} & a_{p,p+2} & \ldots & a_{p,2p+1} \\ \frac{1}{x - a_{p+1}} & \frac{1}{x - a_{p+2}} & \ldots & \frac{1}{x - a_{2p+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et les coefficients des fonctions irrationnelles du second ordre des quantités $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Ce résultat vient à confirmer et à préciser le caractère exceptionnel des équations de la bissection que M. JORDAN a mis en évidence, au n° 491 de son excellent *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris, 1870).

7 mars 1870.

CLXXXIV.

SUR L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

(Extrait d'une lettre à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXIII (1871), pp. 1470-1472.

Voici quelques observations sur votre fonction $W_\infty = G G_1 G_2 G_3 G_4$, pour laquelle vous avez déjà annoncé que l'expression de A donnée par la fonction $p u W + q u$ ne contient pas le terme en pq. J'observerai, avant tout, qu'on peut déterminer une infinité de fonctions pour lesquelles le coefficient du produit des deux indéterminées p, q est identiquement égal à zéro. En effet, de l'équation

$$f(y) = (y-a)^6 - 4a(y-a)^5 + 10b(y-a)^3 - 4c(y-a) + 5b^2 - 4ac = 0,$$

on déduit:

$$f'(y)\frac{\partial y}{\partial b} + f'(b) = 0, \qquad f'(y)\frac{\partial y}{\partial c} + f'(c) = 0,$$

ou:

$$\frac{\partial y}{\partial b} = -10\frac{(y-a)^3 + b}{f'(y)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{4y}{f'(y)};$$

en conséquence:

$$\sum \frac{\partial y}{\partial b} = 0, \qquad \sum \frac{\partial y}{\partial c} = 0.$$

Or, en posant

$$\sqrt{Y} = p\sqrt{y} + q\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial b} + r\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c},$$

les quantités Y sont, comme il est connu, les racines d'une équation

$$(Y-A)^6 - 4A(Y-A)^5 + 10B(Y-A)^3 - 4C(Y-A) + 5B^2 - 4AC = 0,$$

et l'on aura:

$$A = \frac{1}{10} \sum Y.$$

Mais

$$Y = p^2 y + q^2 \left(\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial b}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c}\right)^2 + 2qr \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial b} \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c} + pq \frac{\partial y}{\partial b} + pr \frac{\partial y}{\partial c},$$

et

$$\sum Y = p^2 \sum y + q^2 \sum \left(\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial b}\right)^2 + r^2 \sum \left(\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c}\right)^2 + 2qr \sum \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial b} \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c},$$

les coefficients de pq, pr étant égaux à zéro.

Votre fonction uW se déduit de celle que j'ai considérée dans mon premier travail *) sur la méthode de M. KRONECRER, $\sqrt{y} = u + \omega v$, par une opération analogue à la combinaison:

$$q \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial b} + r \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c}.$$

En effet, soient:

$$f(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_5)(x, 1)^5 = 0$$

l'équation du cinquième degré;

$$h(x) = (h_0, h_1, \ldots, h_6)(x, 1)^6$$

son hessien;

$$l = l_0 x + l_1, \quad m = m_0 x + m_1$$

les deux covariants linéaires du cinquième et du treizième degré; par conséquent: $l_0 m_1 - l_1 m_0$, à un facteur près, l'invariant du dix-huitième degré R.

Or en indiquant par P, Q les deux opérations

$$l_1 \left[h_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + h_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + h_5 \frac{\partial}{\partial a_5}\right] - l_0 \left[h_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + h_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + h_6 \frac{\partial}{\partial a_5}\right],$$

$$m_1 \left[h_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + h_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + h_5 \frac{\partial}{\partial a_5}\right] - m_0 \left[h_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + h_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + h_6 \frac{\partial}{\partial a_5}\right],$$

on trouve:

$$P(\sqrt{y}) = P(u + \omega v) = \tfrac{1}{20}(l_1 r + l_0 \rho)(u - \omega v),$$

$$Q(\sqrt{y}) = Q(u + \omega v) = \tfrac{1}{20}(m_1 r + m_0 \rho)(u - \omega v),$$

---

*) [CXI: t. III, pp. 177-188].

étant

$$r = a_0[x_0x_1 + x_1x_2 + \cdots + x_4x_0 - x_0x_2 - x_2x_4 - \cdots - x_3x_0],$$
$$\rho = a_0[x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + \cdots + x_4x_0x_1 - x_0x_2x_4 - x_2x_4x_1 - \cdots - x_3x_0x_2].$$

Or on a, à un facteur numérique près:

$$W = l_1 r + l_0 \rho,$$

ce que l'on prouve en observant que

$$\sum r u^2 = 80\, l_0, \qquad \sum \rho u^2 = -80\, l_1;$$

par conséquent:

$$80\, W = \rho \sum r u^2 - r \sum \rho u^2 = (\rho r_0 - r\rho_0)u_0^2 + \cdots + (\rho r_4 - r\rho_4)u_4^2;$$

mais:

$$\rho r_0 - r\rho_0 = 2(u_4 - u_1), \qquad \rho r_1 - r\rho_1 = 2(u_0 - u_2), \qquad \ldots;$$

donc:

$$40\, W = u_0^2(u_4 - u_1) + u_1^2(u_0 - u_2) + u_2^2(u_1 - u_3) + u_3^2(u_2 - u_4) + u_4^2(u_3 - u_0),$$

comme il est connu. Enfin en nommant h, i, j les invariants des quatrième, huitième, douzième degrés de $f(x)$, on a:

$$(l_1 r + l_0 \rho)(u - \omega v) = \frac{1}{25} R \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial j} = \frac{1}{25} R \frac{\partial (u + \omega v)}{\partial j},$$

ou, en se rappelant que

$$a = \frac{1}{2\sqrt{5}}(h - 3\delta\sqrt{5}),$$

$$b = \frac{4^2}{3\cdot 5^2\sqrt{5}}[3i(h + 5\delta\sqrt{5}) - 64j], \qquad c = -\frac{4^2}{3\cdot 5^2\sqrt{5}}(h + 5\delta\sqrt{5})^2 j,$$

si l'on pose

$$125\,\delta^2 = h^2 - 128\, i,$$

on trouve:

$$(l_1 r + l_0 \rho)(u - \omega v) = -\frac{4^2}{3\cdot 5^4\sqrt{5}} R\left[64 \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial b} + (h + 5\delta\sqrt{5})^2 \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c}\right],$$

comme je voulais le démontrer.

La propriété que votre fonction $W(u - \omega v)$ est la dérivée de la quantité $u + \omega v$ par rapport à l'invariant j du douzième degré me semble très intéressante.

26 décembre 1871.

CLXXXV.

SUR UNE FORMULE DE TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES *).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences,
t. LXXIX (1874), pp. 1065-1069; t. LXXX (1875), pp. 261-264.

NOTE I.

On sait, par les recherches de M. HERMITE, qu'en désignant par g_2, g_3 les invariants d'une forme binaire du quatrième degré, on peut donner à l'intégrale elliptique la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = du.$$

Il semble, d'après quelques indications qu'on doit à ses élèves, que M. WEIERSTRASS ait, dans ses leçons, refondu à nouveau la théorie des fonctions elliptiques, en prenant pour type la forme précédente. Les renseignements les plus importants sur les résultats obtenus par le savant professeur sont exposés dans deux Notes de M. MÜLLER, publiées, l'une, comme dissertation inaugurale, en 1867, la seconde, plus récemment, en 1872 **). L'un et l'autre des Mémoires de M. MÜLLER ont pour but la transformation des fonctions elliptiques de la forme indiquée, en supposant connues les propriétés des fonctions doublement périodiques $x = \wp(u)$.

Mais le problème de la transformation peut être envisagé, comme on sait, d'un autre point de vue, indépendamment des propriétés des fonctions périodiques, et c'est

*) [Présentée par M. HERMITE].

**) H. F. MÜLLER, *De transformatione functionum ellipticarum* (Dissertatio inauguralis, Berolini (1867); *Ueber die Transformation vierten Grades der elliptischen Functionen* (Festschrift, Berlin 1872).

en suivant cette méthode plus directe que je suis arrivé à établir certaines formules générales que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie.

En supposant

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - G_2 y - G_3}} = du,$$

je considère pour le moment les transformations de degré n nombre premier. Les formules principales, pour ces transformations, sont données par les théorèmes suivants :

1° En posant $\nu = \frac{n-1}{2}$, soit

$$T = x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_\nu.$$

Si, avec le polynôme T, on forme le polynôme du degré n

$$(1) \qquad U = \varphi(x)(T'^2 - TT'') - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)TT' + [(2\nu+1)x + 2a_1]T^2,$$

où

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \qquad n = 2\nu + 1,$$

et T', T'', ... sont les dérivées de T; la formule de transformation sera

$$y = \frac{U}{T^2}.$$

2° Si l'on pose

$$U = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \cdots + \alpha_n,$$

on a, pour un coefficient quelconque α_s, la valeur suivante :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_s = {} & \sum_0^{s} {}_i (2s^2 + s + 1 - 8i^2) a_i a_{s-i} + 2a_1 \sum_0^{s-1} {}_i a_i a_{s-i-1} \\ & - \tfrac{1}{2} g_2 \sum_0^{s-2} {}_i \left(\nu - s^2 + \tfrac{7}{2}s - 3 + 4is - 8i - 4i^2\right) a_i a_{s-i-2} \\ & - \tfrac{1}{2} g_3 \sum_0^{s-3} {}_i (2\nu - s^2 + 5s - 6 + 4is - 12i - 4i^2) a_i a_{s-i-3}. \end{aligned} \right.$$

La détermination des valeurs de G_2, G_3 et des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ de la formule de transformation peut s'obtenir comme il suit.

Soit W le polynôme du degré $2n+1$, qu'on obtient en substituant, dans la formule (1), le polynôme U au polynôme T, n au lieu de ν, α_1 pour a_1. En supposant

$$W = x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + A_2 x^{2n-1} + \cdots + A_{2n+1},$$

la valeur d'un coefficient quelconque A_s se déduira de la formule (3) en changeant les a avec les α et substituant n au lieu de ν.

Cela posé, on aura identiquement

$$W - x U^2 + \tfrac{1}{2} G_2 U V + G_3 V^2 = 0, \tag{3}$$

où $V = T^2$; et, en égalant à zéro les coefficients de l'équation même, on aura une série de relations dont on déduira les valeurs cherchées.

Les coefficients de x^{2n-1}, x^{2n-2}, ..., dans l'équation (3), donnent

$$A_2 - (\alpha_1^2 + 2\alpha_2) + \tfrac{1}{2} G_2 = 0,$$

$$A_3 - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3) + \tfrac{1}{2} G_2 (2a_1 + \alpha_1) + G_3 = 0,$$

$$A_4 - (\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_4) + \tfrac{1}{2} G_2 (a_1^2 + 2a_2 + 2a_1\alpha_1 + \alpha_2) + 4a_1 G_3 = 0,$$

. . . .

$$A_{2n+1} + \tfrac{1}{2} G_2 \alpha_n a_\nu^2 + G_3 a_\nu^4 = 0;$$

mais on a, pour la formule (2):

$$\alpha_1 = 2a_1,$$

$$\alpha_2 = 7a_1^2 - 10a_2 - \frac{\nu}{2} g_2,$$

$$\alpha_3 = 2a_1^3 + 8a_1a_2 - 28a_3 - \frac{2\nu - 3}{2} g_2 a_1 - \nu g_3,$$

$$\alpha_4 = 5a_2^2 + 4a_1^2 a_2 - 2a_1a_3 - 54a_4 + \frac{\nu - 1}{2} g_2 a_1^2 - (\nu - 5) g_2 a_2 - 2(\nu - 1) g_3 a_1,$$

. . . .

$$\alpha_n = 2a_1 a_\nu^2 + \tfrac{1}{2} g_2 a_{\nu-1} a_\nu - g_3 a_{\nu-1}^2 + 2 g_3 a_{\nu-2} \alpha_\nu,$$

et semblablement pour les A, changeant a en α, ν en n; on aura donc, pour une transformation du degré n, les valeurs suivantes de G_2, G_3:

$$\left\{\begin{aligned} G_2 &= 120(a_1^2 - 2a_2) - (5n - 6) g_2, \\ G_3 &= -280(a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3) + 42 g_2 a_1 - (14n - 15) g_3. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

En substituant ces valeurs dans les coefficients de x^{2n-3}, x^{2n-4}, ... de l'équation (3), on obtiendra les relations cherchées entre a_1, a_2, a_3, ..., et de celles-ci les équations qui donnent les valeurs de chacun de ces coefficients.

Par exemple, le coefficient de x^{2n-3} conduit à l'équation

$$(5)\quad \begin{cases} a_1^4 - 4a_1^2 a_2 - 10 a_2^2 + 28 a_1 a_3 - 28 a_4 \\ + \frac{n-4}{2} g_2 (a_1^2 - 2a_2) + g_3 a_1 - \frac{(n-1)(n-2)}{96} g_2^2 = 0, \end{cases}$$

et le coefficient de x^{2n-4} à la suivante:

$$(6)\quad \begin{cases} 2a_1^5 - 7a_1^3 a_2 - 25 a_1 a_2^2 + 59 a_1^2 a_3 - 5 a_2 a_3 - 29 a_1 a_4 - 55 a_5 \\ + \frac{13n-51}{12} g_2 a_1^3 - 7\frac{n-3}{4} g_2 a_1 a_2 - 5\frac{3n-8}{2} g_2 a_3 + \frac{n+1}{2} g_3 a_1^2 \\ - (n-5) g_3 a_2 - \frac{3n^2 - 15n + 22}{96} g_2^2 a_1 - \frac{(n-1)(n-3)}{48} g_2 g_3 = 0. \end{cases}$$

Or en supposant $n = 3$, où, pour la transformation du troisième degré, on a un seul coefficient a_1, l'équation (5) donne, pour la détermination de ce coefficient, la suivante:

$$a_1^4 - \tfrac{1}{2} g_2 a_1^2 + g_3 a_1 - \tfrac{1}{48} g_2^2 = 0,$$

et des relations (4) on déduit:

$$G_2 - 3^2 g_2 = 6(20 a_1^2 - 3 g_2), \qquad G_3 + 3^3 g_3 = -14(20 a_1^2 - 3 g_2) a_1,$$

et par conséquent:

$$a_1 = -\frac{3}{7} \frac{G_3 + 3^3 g_3}{G_2 - 3^2 g_2}.$$

Semblablement, pour $n = 5$, ou pour la transformation du cinquième degré, on déduira des équations (5) et (6) les deux suivantes:

$$a_1 X - 2Y = 0, \qquad (12 a_1^2 + g_2) X - 30 a_1 Y = 0,$$

en posant

$$X = a_1^3 - 6 a_1 a_2 + \tfrac{1}{2} g_2 a_1 - g_3,$$

$$Y = 5 a_2^2 - a_1^2 a_2 + \tfrac{1}{2} g_2 a_2 - g_3 a_1 + \tfrac{1}{16} g_2^2.$$

On aura en conséquence:

$$X = 0, \quad Y = 0;$$

la première donne

$$a_2 = \frac{1}{6 a_1} (a_1^3 + \tfrac{1}{2} g_2 a_1 - g_3),$$

et, en éliminant a_2, on aura, pour la détermination du coefficient a_1, l'équation du

sixième degré

$$a_1^6 - 5g_2a_1^4 + 40g_3a_1^3 - 5g_2^2a_1^2 + 8g_2g_3a_1 - 5g_3^2 = 0.$$

Les équations (4) donnent pour $n = 5$, en substituant pour a_2 la valeur trouvée:

$$G_2 - 5^2g_2 = \frac{8}{a_1}(10a_1^3 - 8g_2a_1 + 5g_3),$$

$$G_3 + 5^3g_3 = -14(10a_1^3 - 8g_2a_1 + 5g_3),$$

d'où

$$a_1 = -\frac{4}{7}\frac{G_3 + 5^3g_3}{G_2 - 5^2g_2}.$$

Nous réservons à une autre occasion l'exposition de quelques propriétés de ces équations modulaires.

NOTE II.

Dans la Note précédente je me suis réservé d'exposer quelques propriétés des équations modulaires relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = du.$$

Je vais considérer premièrement l'équation du sixième degré qu'on obtient pour la transformation du cinquième ordre, équation qui, en posant $a_1 = -2x$ dans celle de ma première Note, prend la forme

$$z^6 - \frac{5}{4}g_2z^4 - 5g_3z^3 - \frac{5}{16}g_2^2z^2 - \frac{1}{4}g_2g_3z - \frac{5}{2^6}g_3^2 = 0. \tag{1}$$

Le premier membre de cette équation a une propriété remarquable, parce qu'il ne diffère que d'une quantité constante du covariant sextique d'une certaine forme du quatrième degré. En effet, en considérant la forme biquadratique

$$f = \left(0,\ 1,\ 0,\ -\tfrac{1}{4}g_2,\ -g_3\right)(x_1,\ x_2)^4,$$

on a vu que ses invariants sont les invariants g_2, g_3; et ses covariants h, θ biquadratique et sextique ont la forme

$$h = -\left[\left(x_1^2 + \tfrac{1}{4}g_2x_2^2\right)^2 + 2g_3x_1x_2^3\right],$$

$$\theta = x_1^6 - \frac{5}{4}g_2x_1^4x_2^2 - 5g_3x_1^3x_2^3 - \frac{5}{16}g_2^2x_1^2x_2^4 - \frac{1}{4}g_2g_3x_1x_2^5 - \frac{1}{2}g_3^2x_2^6 + \frac{1}{4^3}g_2^3x_2^6,$$

par conséquent, l'équation (1) peut prendre la forme

$$\theta(z, 1) = \frac{1}{4^3}\delta \quad \text{en faisant} \quad \delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Cela posé, si l'on se rappelle qu'entre une forme biquadratique, ses covariants et ses invariants, a lieu la relation $4h^3 - g_2 h f^2 + g_3 f^3 = -4\theta^2$, on aura:

$$4h^3 - g_2 h f^2 + g_3 f^3 = -\frac{\delta^2}{4^5};$$

ou, en indiquant par e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation $4e^3 - g_2 e - g_3 = 0$, on pourra donner à l'équation modulaire (1) la forme

$$4^6(h + e_1 f)(h + e_2 f)(h + e_3 f) + \delta^2 = 0.$$

Mais si dans les formes f, h on pose $x_1 = z$, $x_2 = 1$, on a, après quelques réductions:

$$-(h + e_1 f) = [(z - e_1)^2 - \varepsilon_1]^2, \quad \text{où} \quad \varepsilon_1 = 3e_1^2 - \tfrac{1}{4}g_2,$$

et semblablement en changeant e_1 en e_2, e_3. On a donc enfin comme transformée de l'équation (1), la suivante:

$$[(z - e_1)^2 - \varepsilon_1][(z - e_2)^2 - \varepsilon_2][(z - e_3)^2 - \varepsilon_3] = \frac{1}{4^3}\delta,$$

ou, en posant $\varphi_r = 4[(z - e_r)^2 - \varepsilon_r]$, l'équation

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = \delta. \tag{2}$$

Les fonctions quadratiques φ sont douées des propriétés bien connues dans la théorie des formes binaires *).

Je ne rappellerai que celles qui peuvent avoir des rapports avec le problème qu'on considère ici.

Si l'on pose $\alpha_1 = e_2 - e_3$, $\alpha_2 = e_3 - e_1$, $\alpha_3 = e_1 - e_2$, on a les deux relations suivantes:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 = 2\sqrt{\delta} = 8\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \\ \alpha_1\varphi_1^2 + \alpha_2\varphi_2^2 + \alpha_3\varphi_3^2 = 0, \end{cases}$$

et en faisant $\rho X_1 = \alpha_1\varphi_1$, $\rho X_2 = \alpha_2\varphi_2$, $\rho X_3 = \alpha_3\varphi_3$, on en déduit que l'équation (2) peut prendre la forme d'une cubique ternaire

$$(X_1 + X_2 + X_3)^3 - 32 X_1 X_2 X_3 = 0,$$

*) Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872), § 45, p. 151.

la seconde des relations (3) devenant

$$\frac{1}{\alpha_1}X_1^2 + \frac{1}{\alpha_2}X_2^2 + \frac{1}{\alpha_3}X_3^2 = 0.$$

Ensuite, en observant que les équations (3) donnent

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 8\varepsilon_1 + 4\alpha_3\sqrt{\varphi_1 + 4\varepsilon_1}, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 + 8\varepsilon_1 - 4\alpha_2\sqrt{\varphi_1 + 4\varepsilon_1},$$

on aura, pour une quelconque des fonctions φ:

$$\varphi[(\varphi + 8\varepsilon)^2 + 16\varepsilon(\varphi + 4\varepsilon) + 12e(\varphi + 8\varepsilon)\sqrt{\varphi + 4\varepsilon}] = \delta,$$

par laquelle on parvient aux transformées nouvelles de l'équation modulaire

$$(z - e)^6 + 6e(z - e)^5 + 5\varepsilon(z - e)^4 - 5\varepsilon^2(z - e)^2 - 6e\varepsilon^2(z - e) - \varepsilon^3 = \frac{1}{4^3}\delta,$$

en posant successivement pour e, ε les quantités e_1, ε_1; e_2, ε_2; e_3, ε_3.

Mais, comme on le démontre facilement, on a:

$$\frac{1}{4^3}\delta = -\varepsilon^3 + \frac{9}{4}e^2\varepsilon^2;$$

par conséquent, en divisant les termes de cette dernière équation par $(z - e)^6$ et en posant $q = \frac{6e}{z-e}$, on obtient, après quelques réductions, la suivante:

$$q^6 + 16q^5 + 80q^4 - 320\alpha^2 q^2 - 256\alpha^4 q - 256\alpha^4 = 0,$$

ou

$$q^3 + 10q^2 - 32\alpha^2 + 2(q^2 - 8\alpha^2)\sqrt{q + 5} = 0,$$

en posant $\alpha = \frac{3e}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Enfin, si l'on fait $\sqrt{q + 5} = y - 2$, ou $y = 2 + \sqrt{\frac{5z + e}{z - e}}$, on arrive à l'équation cherchée

$$(y - 1)^5(y - 5) - 4cy = 0,$$

dans laquelle $c = 4(\alpha^2 - 4) = \frac{1}{4}\frac{\delta}{\varepsilon^3}$, et qui a la forme de l'équation du multiplicateur dans la transformation du cinquième ordre.

On peut, du reste, parvenir à cette dernière transformation de l'équation modulaire du sixième degré au moyen d'une formule générale qui donne les relations entre les coefficients a_1, a_2, a_3 du polynôme T de ma première Communication, et les quantités B, B_1, B_2 introduites par JACOBI dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques.

Dans ma première Note, on avait

$$T = x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu};$$

d'autre part, on trouve facilement que

$$T = \frac{1}{B_{\nu}}[B_{\nu}(x-e)^{\nu} - B_{\nu-1}\sqrt{\varepsilon}(x-e)^{\nu-1} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\nu-1}B_{\nu-1}\varepsilon^{\frac{\nu-1}{2}}(x-e) + (-1)^{\nu}B_{\nu}\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}],$$

par conséquent on aura :

$$a_1 = -\nu e - \frac{B_{\nu-1}}{B_{\nu}}\sqrt{\varepsilon},$$

$$a_2 = \frac{\nu(\nu-1)}{2}e^2 + (\nu-1)e\frac{B_{\nu-1}}{B_{\nu}}\sqrt{\varepsilon} + \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu}}\varepsilon,$$

$$a_3 = -\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.3}e^3 - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}e^2\frac{B_{\nu-1}}{B_{\nu}}\sqrt{\varepsilon} - (\nu-2)e\frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu}}\varepsilon - \frac{B_{\nu-3}}{B_{\nu}}\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

ainsi de suite.

La première de ces relations, en posant $a_1 = -\nu\zeta$, donne

$$\zeta - e = \frac{1}{\nu}\frac{B_{\nu-1}}{B_{\nu}}\sqrt{\varepsilon},$$

de laquelle, en posant $q = \frac{3\nu e}{\zeta - e}$, $\alpha = \frac{3e}{\sqrt{\varepsilon}}$, on déduit

$$q = \nu^2\alpha\frac{B_{\nu}}{B_{\nu-1}}.$$

Pour $n = 3$, on a $\nu = 1$, et $\frac{1}{\alpha}q = \frac{B_1}{B} = \xi\sqrt{\frac{\lambda}{k}}$, ξ étant le multiplicateur, k, λ les modules. On aura ainsi, comme il est connu, l'équation

$$\left(\frac{1}{\alpha}q\right)^4 - 6\left(\frac{1}{\alpha}q\right)^2 - 4\frac{1+k^2}{k}\frac{1}{\alpha}q - 3 = 0,$$

ou

$$\frac{\varepsilon^2}{(\zeta-e)^4} - 6\frac{\varepsilon}{(\zeta-e)^2} - 4\frac{1+k^2}{k}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\zeta-e} - 3 = 0.$$

Cette dernière, si l'on suppose $\frac{1+k^2}{k} = \alpha$, donne, après quelques réductions, la

suivante déjà calculée dans ma première Note:

$$z^4 - \tfrac{1}{2} g_2 z^2 - g_3 z - \tfrac{1}{48} g_2^2 = 0.$$

Pour $n = 5$ on a:

$$\nu = 2 \quad \text{et} \quad q = 4\alpha \frac{B_2}{B_1};$$

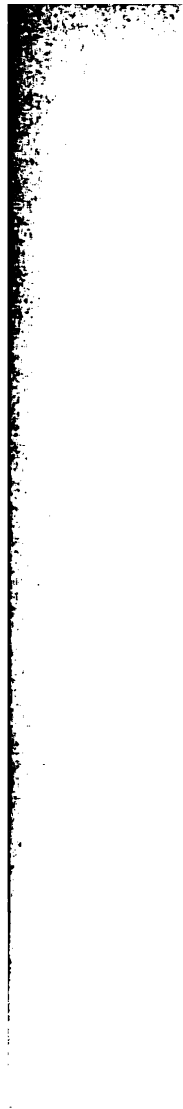
mais, en posant $y = \frac{B_2}{B} = \xi \sqrt{\frac{\lambda}{k}}$, on trouve:

$$4\alpha \frac{B_2}{B_1} = y^2 - 4y - 1;$$

par conséquent

$$q + 5 = (y - 2)^2,$$

comme on a démontré ci-dessus. Des résultats analogues existent pour les équations correspondants à des transformations d'ordre supérieur.

9 novembre 1874; 25 janvier 1875.

CLXXXVI.

SUR L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXX (1875), pp. 753-757, 815-819.

I.

M. HERMITE, dans son important travail: *Sur l'équation du cinquième degré* *), a considéré certaines expressions des racines x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 d'une équation du cinquième degré, qu'il désigne par F_ν, G_ν, H_ν. Ces quantités, qui ont une grande importance dans les recherches de M. HERMITE, sont les suivantes:

$$F = (01)(04)(32) + (02)(03)(14),$$

$$G = (01)(02)(43) + (03)(04)(12),$$

$$H = (01)(03)(42) + (02)(04)(31),$$

en posant $(rs) = x_r - x_s$. On représente par F_ν, G_ν, H_ν ce que deviennent respectivement ces quantités, en ajoutant aux indices des racines, pris suivant le module 5, le nombre ν.

M. HERMITE a étudié dans son Mémoire les fonctions qui résultent de la multi-

*) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXI (1865), pp. 877-882, 965-972, 1073-1081; t. LXII (1866), pp. 65-72, 157-162, 245-253, 715-722, 919-924, 959-966, 1054-1059, 1161-1167, 1213-1215].

plication des quantités F ou des quantités H; relativement à l'expression

$$W = a_0^6 G G_1 G_2 G_3 G_4,$$

il a énoncé *) une propriété très remarquable; mais il a déclaré en même temps *ajourner l'étude de cette nouvelle espèce de fonctions.*

Si l'on désigne par u l'expression

$$u = a_0^2(01)(12)(23)(34)(40) = a_0^2(01234),$$

la propriété remarquée par M. Hermite peut s'énoncer de la manière suivante. Si, en prenant comme point de départ l'expression

$$puW + qu,$$

on forme l'équation du sixième degré qui a le même groupe que l'équation du multiplicateur dans la transformation des fonctions elliptiques, équation à laquelle, comme il est connu, on peut donner la forme

$$(1)\quad (z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 10b(z-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0;$$

le coefficient a qui est du second degré relativement aux indéterminées p, q ne contient pas le terme en pq.

On peut démontrer que cette propriété est susceptible d'une grande extension, parce qu'à chaque fonction $\sqrt{z}$ des racines x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, qui a la propriété d'être racine d'une équation de la forme (1), correspondent deux, et seulement deux, fonctions des racines $x_0, x_1, \ldots, x_4$, qui ont la propriété signalée par M. Hermite. En effet, en indiquant par $f(z)$ le premier membre de l'équation (1), on a, pour une racine quelconque z:

$$f'(z)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \quad f'(z)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial c} = 0;$$

par conséquent les polynômes $\frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$ étant des degrés 3, 1 en z, on aura:

$$(2)\quad \sum \frac{\partial z}{\partial b} = 0, \quad \sum \frac{\partial z}{\partial c} = 0,$$

la notation Σ s'étendant aux racines de l'équation $f(z) = 0$. Or on sait que, si la fonction $\sqrt{z}$ a la propriété indiquée plus haut, la même propriété a lieu relativement

*) [V. pag. 1167 du tome LXII des Comptes Rendus].

à ses dérivées prises par rapport aux coefficients a, b, c; on sait de plus qu'entre $\sqrt{z}$ et ces dérivées existe une relation linéaire et que toute fonction entière de $\sqrt{z}$ qui jouit de cette propriété peut s'exprimer en fonction linéaire des dérivées de $\sqrt{z}$ par rapport aux coefficients a, b, c. En conséquence, si l'on considère l'expression

$$\sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b} + r\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c},$$

on aura une équation en Z de la forme (1), qui sera la plus générale de cette espèce; mais, en désignant par A, B, C les coefficients de cette équation, on aura évidemment:

$$10A = 10ap^2 + q^2\sum\left(\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b}\right)^2 + r^2\sum\left(\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c}\right)^2$$
$$+ 2qr\sum\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b}\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c} + 2rp\sum\sqrt{z}\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c} + 2pq\sum\sqrt{z}\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b},$$

et, à cause des relations (2), les coefficients de pq, pr sont égaux à zéro, c'est-à-dire que l'expression de A ne contient pas les termes en pq et en pr. Les quantités $\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial b}$, $\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial c}$ sont par conséquent de la même espèce que la fonction uW considérée par M. Hermite et sont les seules qui pour chaque fonction $\sqrt{z}$ puissent exister.

Cela posé, je vais déterminer quelle est la relation entre la quantité uW considérée par M. Hermite et les deux dérivées d'une certaine fonction $\sqrt{z}$ qui ont la même propriété.

Soit

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5 = 0 \tag{3}$$

l'équation du cinquième degré dont les racines sont $x_0, x_1, \ldots, x_4$. En posant

$$\alpha_0 = 2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2),$$
$$\alpha_1 = a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3,$$
$$\alpha_2 = 2(a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2),$$
$$-2\beta_0 = a_0\alpha_2 - 2a_1\alpha_1 + a_2\alpha_0, \qquad -2\beta_1 = a_1\alpha_2 - 2a_2\alpha_1 + a_3\alpha_0,$$
$$-2\beta_2 = a_2\alpha_2 - 2a_3\alpha_1 + a_4\alpha_0, \qquad -2\beta_3 = a_3\alpha_2 - 2a_4\alpha_1 + a_5\alpha_0,$$

enfin

$$\gamma_0 = 2(\beta_0\beta_2 - \beta_1^2), \qquad \gamma_1 = \beta_0\beta_3 - \beta_1\beta_2, \qquad \gamma_2 = 2(\beta_1\beta_3 - \beta_2^2),$$

on a, pour les invariants des degrés quatrième, huitième, douzième de la forme (3),

les valeurs suivantes:

$$h = 5^4(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2), \qquad i = \tfrac{1}{2}5^8(\alpha_0\gamma_2 - 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0), \qquad j = 5^{12}(\gamma_0\gamma_2 - \gamma_1^2),$$

et, en indiquant par δ le produit des différences des racines multiplié par a_0^4, on a

$$5^3\delta^2 = h^2 - 128 i.$$

Or j'ai démontré dans ma Note du 1858, sur la méthode de M. KRONECKER *), qu'en désignant par v la fonction des racines $x_0, x_1, x_2, \ldots$ qui se déduit de u par la substitution $\begin{pmatrix} \nu \\ 2\nu \end{pmatrix}$ (mod. 5), l'expression

$$\sqrt{z} = u + \omega v,$$

où $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, donne pour z six valeurs qui sont racines d'une équation de la forme (1). Les valeurs des coefficients a, b, c sont dans ce cas

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\omega}{2\sqrt{5}}(h - 3\delta\sqrt{5}), \\ b &= \frac{\omega^3}{8.5^2\sqrt{5}}\left[(h - 5\delta\sqrt{5})(h + 5\delta\sqrt{5})^2 - \frac{2}{3}\cdot 4^6 j\right], \\ c &= -\frac{4^2\omega^5}{3.5^2\sqrt{5}}(h + 5\delta\sqrt{5})^2 j; \end{aligned} \right.$$

ainsi les coefficients a, b, c sont des fonctions des invariants h, δ, j, et ce dernier n'entre que dans les valeurs de b et de c. Par conséquent l'expression $\dfrac{\partial\sqrt{z}}{\partial j}$ sera une fonction linéaire de $\dfrac{\partial\sqrt{z}}{\partial b}$, $\dfrac{\partial\sqrt{z}}{\partial c}$ et aura la propriété de la fonction correspondante qu'on déduit de la quantité uW de M. HERMITE. J'ajoute que les deux fonctions ne diffèrent que d'une constante, ce que je vais démontrer.

Dans ce but, je dois par avance exposer ici certains résultats qui appartiennent à la théorie des formes binaires, sur lesquelles je reviendrai dans une autre occasion. Pour le moment je me borne à énoncer qu'en désignant par

$$H = (h_0, h_1, \ldots, h_6)(x, 1)^6$$

le covariant hessien de la forme binaire (3), et en indiquant par M, N les symboles

*) [CXI: t. III, pp. 177-188].

d'opération

$$M = b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + b_5 \frac{\partial}{\partial a_5},$$

$$N = b_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + b_6 \frac{\partial}{\partial a_5},$$

on a les résultats suivants:

$$(5) \quad \begin{cases} M(h) = 8.5^3 l_0, & M(\delta) = 0, & M(j) = \frac{5^3}{4}(7 i l_0 - 5^9 m_0), \\ N(h) = 8.5^3 l_1, & N(\delta) = 0, & N(j) = \frac{5^3}{4}(7 i l_1 - 5^9 m_1), \end{cases}$$

dans lesquels les expressions

$$l_0 = \alpha_2 \beta_0 - 2 \alpha_1 \beta_1 + \alpha_0 \beta_2, \qquad l_1 = \alpha_2 \beta_1 - 2 \alpha_1 \beta_2 + \alpha_0 \beta_3,$$

$$m_0 = \beta_0 l_1^2 - 2 \beta_1 l_0 l_1 + \beta_2 l_0^2, \qquad m_1 = \beta_1 l_1^2 - 2 \beta_2 l_0 l_1 + \beta_3 l_0^2$$

sont les coefficients des deux covariants linéaires du cinquième et du treizième degré de la forme binaire (3).

Cela posé, en indiquant par $\varphi(x)$ le premier membre de l'équation (3), on démontre bien facilement que, pour une racine quelconque $x_0, x_1, \ldots$, on a:

$$(b_0, b_1, \ldots, b_5)(x, 1)^5 = -\frac{1}{8.5^2} \varphi'(x) \varphi''(x),$$

$$(b_1, b_2, \ldots, b_6)(x, 1)^5 = \frac{1}{8.5^2} \varphi'(x) [x \varphi''(x) - 8 \varphi'(x)],$$

et en conséquence, pour une racine de l'equation $\varphi(x)$, on a:

$$M(x) = \tfrac{1}{10}(a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3),$$

$$N(x) = \tfrac{1}{10}(a_0 x^4 + 5 a_1 x^3 + 9 a_2 x^2 + 7 a_3 x + 2 a_4).$$

II.

Appliquant les résultats établis dans les pages précédentes aux fonctions u, v, on trouve:

$$(6) \quad \begin{cases} M(u) = \frac{1}{20} r u, & M(v) = -\frac{1}{20} r v, \\ N(u) = -\frac{1}{20} \rho u, & N(v) = \frac{1}{20} \rho v, \end{cases}$$

si l'on pose, pour abréger,

$$r = a_0(x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0 - x_0x_2 - x_2x_4 - x_4x_1 - x_1x_3 - x_3x_0),$$

$$\rho = a_0(x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_0 + x_4x_0x_1$$
$$- x_0x_2x_4 - x_2x_4x_1 - x_4x_1x_3 - x_1x_3x_0 - x_3x_0x_2).$$

Ces fonctions r, ρ et les autres $r_0, r_1, \ldots; \rho_0, \rho_1, \ldots$, qu'on déduit d'elles par la substitution $\begin{pmatrix} \nu \\ 3\nu^3 + \mu \end{pmatrix}$ (mod. 5), ont la propriété remarquable suivante:

$$\rho r_0 - r\rho_0 = 2(u_4 - u_1) = 2(v - v_3), \qquad \rho r_1 - r\rho_1 = 2(u_0 - u_2) = 2(v_3 - v_4), \ldots,$$

par laquelle on obtient les deux relations:

$$(7) \quad \begin{cases} \rho\sum r u^m - r\sum \rho u^m = 2[u_0^m(u_4 - u_1) + u_1^m(u_0 - u_2) + u_2^m(u_1 - u_3) \\ \qquad\qquad + u_3^m(u_2 - u_4) + u_4^m(u_3 - u_0)], \\ \rho\sum r v^m - r\sum \rho v^m = 2[v_0^m(v_2 - v_3) + v_1^m(v_3 - v_4) + v_2^m(v_4 - v_0) \\ \qquad\qquad + v_3^m(v_0 - v_1) + v_4^m(v_1 - v_2)]. \end{cases}$$

Enfin, si l'on se rappelle que

$$\sum u^2 = b - 3\delta, \qquad \sum v^2 = b + 3\delta,$$

on aura, en opérant avec M, N:

$$(8) \quad \begin{cases} \sum r u^2 = 5^4.4^2 l_0, \qquad \sum r v^2 = -5^4.4^2 l_0, \\ \sum \rho u^2 = -5^4.4^2 l_1, \qquad \sum \rho v^2 = 5^4.4^2 l_1, \end{cases}$$

et, par conséquent, en posant $m = 2$ dans les relations (7), on aura:

$$8.5^4(l_0\rho + l_1 r) = u_0^2(u_4 - u_1) + u_1^2(u_0 - u_2) + \cdots + u_4^2(u_3 - u_0).$$

Or la quantité W considérée par M. Hermite est identique à l'expression du second membre de cette dernière relation *); on aura ainsi:

$$W = 8.5^4(l_0\rho + l_1 r),$$

*) M. Hermite a eu la bonté de me faire connaître cette identité dans une lettre d'octobre 1866.

ou, à cause des équations (6):

$$uW = 2.4^2.5^5[l_1 M(u) - l_0 N(u)],$$

et, en indiquant par P l'opération $l_1 M - l_0 N$, on aura enfin:

$$uW = 2.4^2.5^5 P(u) \quad \text{et semblablement} \quad vW = -2.4^2.5^5 P(v).$$

Les équations (5) donneront les trois suivantes:

$$(9) \qquad P(h) = 0, \quad P(\delta) = 0, \quad P(j) = \frac{1}{4}5^{12}(l_0 m_1 - l_1 m_0) = \frac{2}{5^6}J,$$

J étant l'invariant du dix-huitième degré, et l'expression $\sqrt{z} = u + \omega v$ donne

$$P(\sqrt{z}) = \frac{1}{2.4^2.5^5}W(u - \omega v) = \frac{1}{4.5}(l_0\rho + l_1 r)(u - \omega v);$$

mais $\sqrt{z}$ étant fonction de a, b, c et par conséquent de h, δ, j, on aura:

$$P(\sqrt{z}) = \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial h}P(h) + \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial\delta}P(\delta) + \frac{\partial\sqrt{z}}{\partial j}P(j),$$

ou, d'après les égalités (9):

$$J\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial j} = \frac{1}{8}5^5(l_0\rho + l_1 r)(u - \omega v).$$

La relation qui existe entre l'expression $\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial j}$ et celle dont M. HERMITE se proposait l'étude dans son travail de 1866 étant démontrée de cette manière, je passe à la considération d'une seconde fonction qui a quelque analogie avec la précédente, parce qu'elle s'obtient en opérant sur $\sqrt{z}$ avec le symbole $Q = m_1 M - m_0 N$. On a évidemment:

$$Q(\sqrt{z}) = \frac{1}{4.5}(m_1 r + m_0\rho)(u - \omega v) \text{ *)};$$

---

*) On peut observer que

$$\sum r u^6 = \frac{1}{3}4^2.5^4(2h^2 - 21h\delta + 29\delta^2)l_0 - \frac{1}{3}4^5.5^{11}m_0,$$

$$\sum \rho u^6 = -\frac{1}{3}4^2.5^4(2h^2 - 21h\delta + 29\delta^2)l_1 + \frac{1}{3}4^5.5^{11}m_1,$$

de sorte qu'on aura:

$$u\left(\rho\sum r u^6 - r\sum \rho u^6\right) = \frac{1}{3}4^2.5^4(2h^2 - 21h\delta + 29\delta^2)P(u) - \frac{1}{3}4^6.5^{12}Q(u);$$

par conséquent la nouvelle fonction $Q(\sqrt{z})$ se déduit de celles qu'on obtient en posant $m = 6$ dans les relations (7). Évidemment les fonctions $P(\sqrt{z})$, $Q(\sqrt{z})$ sont les seules de cette espèce.

par conséquent la quantité Z donnée par la relation

$$\sqrt{Z}=\xi\sqrt{z}+\eta P(\sqrt{z})+\zeta Q(\sqrt{z}),$$

dans laquelle ξ, η, ζ sont trois indéterminées, sera racine d'une équation de la forme (1).

Pour déterminer la valeur du coefficient A de l'équation en Z, je rappelle que, en désignant par α, γ, l, m les covariants quadratiques et linéaires *)

$$\alpha=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)(x,\ y)^2, \qquad l=l_0x\ +l_1y,$$

$$\gamma=(\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2)(x,\ y)^2, \qquad m=m_0x+m_1y,$$

et posant

$$\mu=bi-3j, \qquad \nu=\tfrac{1}{4}(bj-i^2),$$

$$\sigma=b\nu-i\mu, \qquad \tau=i\nu-j\mu,$$

d'où résulte

$$J^2=2i\mu\nu-b\nu^2-j\mu^2=\mu\tau-\nu\sigma,$$

$$\sigma^2+4\mu^2\nu=-bJ^2, \qquad \sigma\tau+4\mu\nu^2=-iJ^2, \qquad \tau^2+4\nu^3=-jJ^2,$$

on a les relations:

$$J^2\alpha=\tfrac{1}{8}5^8(5^{16}\mu m^2+2.5^8\sigma lm-4\mu\nu l^2),$$

$$J^2\gamma=\tfrac{1}{8}5^4(5^{16}\nu m^2+2.5^8\tau lm-4\nu^2 l^2).$$

De ces dernières et des suivantes:

$$\sum r^2u^2=\sum r^2v^2=10b\alpha_0-4^3.5^5\gamma_0, \qquad \sum r^2=4.5^2\alpha_0,$$

$$\sum r\rho u^2=\sum r\rho v^2=-10b\alpha_1+4^3.5^5\gamma_1, \qquad \sum r\rho=-4.5^2\alpha_1,$$

$$\sum \rho^2u^2=\sum \rho^2v^2=10b\alpha_2-4^3.5^5\gamma_2, \qquad \sum \rho^2=4.5^2\alpha_2,$$

on déduit que:

$$\sum(l_1r+l_0\rho)^2u^2=\sum(l_1r+l_0\rho)^2v^2=\frac{4^2}{5^{11}}(b\mu-32\nu),$$

$$\sum(m_1r+m_0\rho)^2u^2=\sum(m_1r+m_0\rho)^2v^2=-\frac{4^3}{5^{27}}\nu(b\mu-32\nu),$$

$$\sum(l_1r+l_0\rho)(m_1r+m_0\rho)u^2=\sum(l_1r+l_0\rho)(m_1r+m_0\rho)v^2=-\frac{4^2}{5^{19}}(b\sigma-32\tau),$$

*) Clebsch e Gordan, *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. I, pp. 23-79]; Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig, 1872, p. 369.

$$\sum (l_1 r + l_0 \rho)^2 = \frac{2.4^2}{5^{10}} \mu,$$

$$\sum (m_1 r + m_0 \rho)^2 = -\frac{2.4^3}{5^{26}} \mu \nu,$$

$$\sum (l_1 r + l_0 \rho)(m_1 r + m_0 \rho) = -\frac{2.4^2}{5^{18}} \sigma,$$

et en observant que, à cause des relations (8), on a:

$$\sum (l_1 r + l_0 \rho) u^2 = -\sum (l_1 r + l_0 \rho) v^2 = 0,$$

$$\sum (m_1 r + m_0 \rho) u^2 = -\sum (m_1 r + m_0 \rho) v^2 = \frac{2.4^3}{5^{14}} J,$$

on obtient:

$$A = \frac{\omega}{2\sqrt{5}} [(b - 3\delta\sqrt{5})\xi^2 + 32 J \xi\zeta + 5(M\eta^2 - 2S\eta\zeta - 4M\nu\zeta^2)],$$

ayant posé $5^7\eta$, $5^{15}\zeta$ au lieu de η, ζ et

$$M = (b + 4\delta\sqrt{5})\mu - 32\nu, \qquad S = (b + 4\delta\sqrt{5})\sigma - 32\tau.$$

Enfin, en écrivant $J\xi$ au lieu de ξ, $M\zeta$ au lieu de ζ, on aura:

$$A = \frac{\omega}{2\sqrt{5}} \{ J^2 [(b - 3\delta\sqrt{5})\xi^2 + 32 M \xi\zeta + 5 M K \zeta^2] + 5 M (\eta - S\zeta)^2 \},$$

la quantité K étant

$$K = (b + 4\delta\sqrt{5})^2 b - 4^3 (b + 4\delta\sqrt{5}) i + 4^5 j.$$

On voit que le coefficient A ne contient que les carrés des trois indéterminées ξ, $\eta - \delta\zeta$, ζ et le produit $\xi\zeta$.

22 et 29 mars 1875.

CLXXXVII.

SUR LA RÉDUCTION D'UNE FORME CUBIQUE TERNAIRE À SA FORME CANONIQUE.

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXI (1875), pp. 590–592.

1. On sait de longtemps qu'une forme cubique ternaire peut se réduire, au moyen d'une substitution linéaire, à sa forme canonique

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6g y_1 y_2 y_3;$$

mais on n'a pu jusqu'à présent déterminer les formules nécessaires pour cette réduction.

Une forme cubique ternaire générale $I(x_1, x_2, x_3)$ peut évidemment toujours s'exprimer dans la forme suivante:

$$I = x_3^3 - 3u x_3 + 2v,$$

u, v étant deux formes binaires en x_1, x_2, la première quadratique, la seconde cubique.

Soient s, t les deux invariants du quatrième et du sixième degré de la forme cubique ternaire I, et z une racine quelconque de l'équation biquadratique très connue

$$z^4 - 6sz^2 - 8tz - 3s^2 = 0; \tag{1}$$

j'ai trouvé que g s'exprime en fonction de z, s, t de la manière très simple suivante:

$$g = \frac{1}{4}\,\frac{s - z^2}{\sqrt[3]{s^3 - t^2}}. \tag{2}$$

2. Les formes binaires u, v donnent, comme on sait *), un système de quinze formes simultanées indépendantes, covariants ou invariants. Je ne considérerai ici que les cinq invariants A, B, C, E, K et les deux covariants linéaires p, q, qui s'obtiennent des formes u, v comme il suit:

$$p = (uv)^2, \qquad q = (up),$$

$$A = \tfrac{1}{2}(uu)^2, \qquad B = \tfrac{1}{2}(uh)^2, \qquad C = \tfrac{1}{2}(hh)^2, \qquad E = \tfrac{1}{2}(up)^2, \qquad K = \tfrac{1}{2}(vp)^3,$$

h étant l'hessien de la forme v, c'est-à-dire $h = (vv)^2$.

Cela posé, les valeurs des indéterminées y_1, y_2, y_3 en fonctions linéaires de x_1, x_2, x_3, sont

$$y_1 = h_1(kx_3 - 2p + l + m),$$

$$y_2 = h_2(kx_3 - 2p + e^2 l + em),$$

$$y_3 = h_3(kx_3 - 2p + el + e^2 m),$$

dans lesquelles e représente une racine cubique imaginaire de l'unité; $k = \frac{1}{2}(z + 3A)$ l, m, h_1, h_2, h_3 étant formés, avec les éléments déjà introduits, de la manière suivante.

Si l'on pose

$$\alpha_0 = -AEk^2 + 2(2A^2E + 2BE - Ag)k - 8E^2,$$

$$\alpha_1 = 2Kk, \qquad \alpha_2 = -Ek^2 + 2(g + 2AE)k,$$

où $g = AC - B^2$; on sait que l, m peuvent s'exprimer par les covariants p, q au moyen des formules:

$$El = \frac{\lambda}{\alpha_2}[(\alpha_1 - \delta)p + \alpha_2 q], \qquad Em = \frac{\mu}{\alpha_2}[(\alpha_1 + \delta)p + \alpha_2 q],$$

où $\delta^2 = \alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2$; λ, μ étant deux indéterminées qui se déduisent des relations

$$(3) \qquad 2\lambda\mu = -\alpha_2 = Ek^2 - 2(g + 2AE)k, \qquad \lambda^3 + \mu^3 = \tfrac{1}{2}Kk^3.$$

Il ne reste qu'à donner les valeurs de h_1, h_2, h_3, pour lesquelles, si l'on pose

$$c_1 = h_1^3, \qquad c_2 = h_2^3, \qquad c_3 = h_3^3,$$

*) Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872), p. 208.

on trouve:

$$c_1 = \frac{cn}{k^2}[12\ (\mu - \ \lambda) - nk\varphi],$$

$$c_2 = \frac{cn}{k^2}[12(e\mu - e^2\lambda) - nk\varphi],$$

$$c_3 = \frac{cn}{k^2}[12(e^2\mu - e\lambda) - nk\varphi];$$

n, φ étant les deux fonctions suivantes de k:

$$\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}z = 3A - k, \qquad \varphi = k^2 - 12Ak + 12(2A^2 + B),$$

et

$$c = \frac{1}{9}\frac{k - 3A}{k^2(k^2 - 6Ak + 8A^2 + 4B)}.$$

3. Ainsi sont déterminés tous les éléments nécessaires pour la réduction d'une forme cubique ternaire à sa forme canonique, et l'on voit que cette réduction n'exige que la résolution de l'équation biquadratique (1) en z, et l'extraction des racines cubiques par laquelle on déduit les valeurs de λ, μ des équations (3).

J'observerai encore que le module Δ de la substitution linéaire est

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-3}}\frac{1}{ng},$$

par conséquent

$$\Delta^2 g^2 = \frac{1}{6}z. \tag{4}$$

Or l'équation (1) donnant

$$\frac{(s - z^2)^3}{s^3 - t^2} = 64\frac{z^2}{z^2 - 9s},$$

on aura par la relation (2):

$$g^3 = \frac{z^2}{z^2 - 9s},$$

par laquelle

$$\Delta^4 g = \frac{1}{6^2}(z^2 - 9s), \qquad \Delta^6 = \frac{1}{6^3}\frac{(z^2 - 9s)^2}{z} = \frac{4}{6^3}(7z^3 - 45sz - 54t).$$

Or de ces dernières on déduit:

$$\frac{1}{4}s = \frac{1}{6^2}z^2 - \Delta^4 g, \qquad t = \frac{4}{6^3}(7z^3 - 45sz) - \Delta^6,$$

ou, en rappelant la relation précédente (4), on a:

$$s = 4\Delta^4 g\,(g^3 - 1), \qquad t = \Delta^6(8g^6 + 20g^3 - 1),$$

comme il est connu.

4 octobre 1875.

CLXXXVIII.

SUR DES CAS DE RÉDUCTION DES FONCTIONS ABÉLIENNES AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES.

(Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXV (1877), pp. 708-710.

Soit n un nombre impair. En désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \mu$ $n+1$ constantes, j'observe avant tout que les $n+1$ expressions

$$A_r = (1 + a_r z)\left(1 + \frac{\mu}{a_r} z\right), \qquad A = (1 - z)(1 - \mu z), \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

ont la propriété suivante:

$$A_r - A = \alpha_r z,$$

en faisant

$$\alpha_r = \frac{1}{a_r}(a_r + 1)(a_r + \mu).$$

Cela posé, soit $A = \rho z$, on aura:

$$A_r = (\rho + \alpha_r) z,$$

et, en indiquant par Z le produit du degré $2n + 3$

$$Z = z A A_1 A_2 \ldots A_n,$$

il viendra:

$$Z = z^{n+2} f(\rho),$$

si l'on pose

$$f(\rho) = \rho(\rho + \alpha_1)(\rho + \alpha_2) \cdots (\rho + \alpha_n). \tag{1}$$

Soient maintenant x_0, y_0; x_1, y_1; ..., x_r, y_r, ...; x_m, y_m les racines des équations quadratiques

$$A - \rho_0 z = 0, \quad A - \rho_1 z = 0, \quad \ldots, \quad A - \rho_m z = 0, \tag{2}$$

où $m = \frac{n+1}{2}$; soit $\varphi(z)$ un polynôme du degré $n + 2$ et λ une quantité constante relativement à z. On pourra évidemment poser:

$$\varphi^2(z) - \lambda^2 Z = (A - \rho_0 z)(A - \rho_1 z) \cdots (A - \rho_m z)\psi(z), \tag{3}$$

$\psi(z)$ étant un polynôme du degré $n + 1$. En effet on aura $2(m + 1) = n + 3$ équations

$$\varphi(z) + \varepsilon\lambda\sqrt{Z} = 0, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

en substituant, au lieu de z, les $2(m + 1)$ racines x_r, y_r, et l'on pourra, de cette manière, trouver la valeur des $n + 3$ indéterminées, qui sont les rapports entre les coefficients de $\varphi(z)$ et λ. L'équation (3) donnera après la valeur de $\psi(z)$.

Or, en indiquant par $z_0, z_1, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $\psi(z) = 0$, et par Z_r, X_r, Y_r les valeurs de Z correspondant à $z = z_r, x_r, y_r$, on déduit de l'équation (3), par la méthode d'ABEL, que

$$\sum_0^n{}_r \frac{z_r^s dz_r}{\sqrt{Z_r}} + \sum_0^m{}_r \left(\frac{x_r^s dx_r}{\sqrt{X_r}} + \frac{y_r^s dy_r}{\sqrt{Y_r}}\right) = 0, \tag{4}$$

pour $s = 0, 1, 2, \ldots, n$; mais la relation (3) a lieu évidemment pour $z = x_r, y_r$; on aura, en conséquence:

$$\sqrt{X_r} = \varepsilon_1 x_r^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{f(\rho_r)}, \quad \sqrt{Y_r} = \varepsilon_2 y_r^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{f(\rho_r)}, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1),$$

$f(\rho)$ ayant la valeur (1). Le second terme de l'équation (4) pourra donc s'écrire:

$$\frac{2}{2s - n} \sum_0^m{}_r \frac{1}{\sqrt{f(\rho_r)}} d\left(\varepsilon_1 x_r^{\frac{2s-n}{2}} + \varepsilon_2 y_r^{\frac{2s-n}{2}}\right), \tag{5}$$

et, en observant que des équations (2) on déduit:

$$x_r y_r = \frac{1}{\mu},$$

on trouve pour ce même second terme l'expression

$$\frac{2}{2s-n}\mu^{\frac{n-2s}{2}}\sum_{0}^{\mu}{}_{r}\frac{1}{\sqrt{f(\rho_r)}}d\left(\varepsilon_1 y_r^{\frac{n-2s}{2}}+\varepsilon_2 x_r^{\frac{n-2s}{2}}\right),$$

qui se déduit aussi de l'expression (5) en la multipliant par $\mu^{\frac{n-2s}{2}}$, et en changeant s en $n-s$, ε_1 en ε_2.

Mais on a:

$$\left(\varepsilon_1 y_r^{\frac{n-2s}{2}}+\varepsilon_2 x_r^{\frac{n-2s}{2}}\right)^2 = x_r^{n-2s}+y_r^{n-2s}+2\varepsilon\mu^{\frac{2s-n}{2}} = \frac{1}{\nu^2}[\Phi_s(\rho_r)+2\varepsilon\nu],$$

$\Phi_s(\rho_r)$ étant un polynôme en ρ_r, du degré $n-2s$, dont les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles en μ, et $\nu=\mu^{\frac{n-2s}{2}}$; on aura donc:

$$d\left(\varepsilon_1 y_r^{\frac{n-2s}{2}}+\varepsilon_2 x_r^{\frac{n-2s}{2}}\right)=\frac{\varepsilon_s}{2\nu}\frac{\Phi_s'(\rho_r)\,d\rho_r}{\sqrt{\Phi_s(\rho_r)+2\varepsilon\nu}},$$

et les équations (4) se transforment dans les suivantes:

$$\sum_{0}^{n}{}_{r}\frac{\zeta_r^s\,d\zeta_r}{\sqrt{Z_r}}=\frac{1}{n-2s}\sum_{0}^{m}{}_{r}\frac{\varepsilon_s\Phi_s'(\rho_r)\,d\rho_r}{\sqrt{f(\rho_r)[\Phi_s(\rho_r)+2\varepsilon\nu]}},$$

$$\sum_{0}^{n}{}_{r}\frac{\zeta_r^{n-s}\,d\zeta_r}{\sqrt{Z_r}}=-\frac{1}{n-2s}\frac{1}{\nu}\sum_{0}^{m}{}_{r}\frac{\varepsilon_s\Phi_s'(\rho_r)\,d\rho_r}{\sqrt{f(\rho_r)[\Phi_s(\rho_r)+2\varepsilon\nu]}},$$

pour $s=0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Le polynôme $f(\rho_r)\Phi_s(\rho_r)$ étant du degré $2(n-s)+1$, on voit tout de suite que les fonctions hyperelliptiques du second membre seront des ordres $n+2$, $n+3$, ..., $2n+1$, et celles du premier de l'ordre $2n+3$. On peut donc opérer la réduction de cette classe de fonctions hyperelliptiques à d'autres d'ordres inférieurs.

Le cas de n pair peut se traiter semblablement; et l'on peut aussi appliquer la méthode aux fonctions hyperelliptiques de seconde et de troisième espèce.

15 octobre 1877.

CLXXXIX.

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences, t. LXXXV (1877), pp. 1000-1002.

Je nomme équation jacobienne du sixième degré une équation dont les racines z_∞, z, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 sont liées par les trois relations

$$\sqrt{z_0}+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}+\sqrt{z_4}=\sqrt{5z_\infty},$$

$$\sqrt{z_0}+\varepsilon^2\sqrt{z_1}+\varepsilon^4\sqrt{z_2}+\varepsilon\sqrt{z_3}+\varepsilon^3\sqrt{z_4}=0,$$

$$\sqrt{z_0}+\varepsilon^3\sqrt{z_1}+\varepsilon\sqrt{z_2}+\varepsilon^4\sqrt{z_3}+\varepsilon^2\sqrt{z_4}=0,$$

ε étant une racine cinquième de l'unité, ou, en d'autres termes, une équation dont les racines carrées des racines peuvent s'exprimer en fonction de trois indéterminées a_0, a_1, a_2 de la manière suivante:

$$\sqrt{z_\infty}=a_0\sqrt{5}, \qquad \sqrt{z_m}=a_0+\varepsilon^m a_1+\varepsilon^{4m}a_2, \quad (m,=0,1,\ldots,4).$$

Cette équation a la forme

$$(1)\ f(z)=(z-a)^6-4a(z-a)^5+10b(z-a)^3-4c(z-a)+5b^2-4ac,$$

a, b, c étant fonctions de a_0, a_1, a_2. J'ai démontré, dans un Mémoire publié en 1867 dans les « Annali di Matematica » *), qu'en posant

$$\frac{\partial b}{\partial a_0}=2b_0,\ \frac{\partial b}{\partial a_2}=b_1,\ \frac{\partial b}{\partial a_1}=b_2;\ \frac{1}{5}\frac{\partial c}{\partial a_0}=2c_0,\ \frac{1}{5}\frac{\partial c}{\partial a_2}=c_1,\ \frac{1}{5}\frac{\partial c}{\partial a_1}=c_2$$

*) [LXVII; t. II, pp. 79-90].

et

$$\sqrt{z'_\infty} = b_0\sqrt{5}, \qquad \sqrt{z'_m} = b_0 + \varepsilon^m b_1 + \varepsilon^{4m} b_2,$$

$$\sqrt{z''_\infty} = c_0\sqrt{5}, \qquad \sqrt{z''_m} = c_0 + \varepsilon^m c_1 + \varepsilon^{4m} c_2,$$

l'expression

$$\sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\sqrt{z'} + r\sqrt{z''}, \tag{2}$$

où p, q, r sont des indéterminées, conduit à une équation jacobienne du sixième degré en Z, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de a, b, c, p, q, r; équation qui est la plus générale de cette espèce.

Soient A, B, C les coefficients de cette équation, on aura

$$(Z-A)^6 - 4A(Z-A)^5 + 10B(Z-A)^3 - 4C(Z-A) + 5B^2 - 4AC = 0. \tag{3}$$

Or, en posant $y = z - a$, $Y = Z - A$ et

$$f_1 = y - 4a, \quad f_2 = yf_1, \quad f_3 = yf_2 + 10b, \quad f_4 = yf_3, \quad f_5 = yf_4 - 4c,$$

j'ai démontré aussi, dans le Mémoire cité, qu'on a:

$$Y = t + t_0 f_1 + t_1 f_2 + t_2 f_3 + t_3 f_4 + t_4 f_5, \tag{4}$$

t, t_0, ... étant des fonctions quadratiques en p, q, r, par lesquelles on a

$$A = p\lambda + q\mu + r\nu,$$

en faisant

$$\lambda = ap + 3bq + cr, \quad \mu = 3bp + a'q + lr, \quad \nu = cp + lq + a''r,$$

et

$$a' = 8a^2 b + c, \quad a'' = b(4ac - 3b^2), \quad l = a(4ac - b^2).$$

Cela posé, je dois rappeler qu'une équation jacobienne (3), dans laquelle $A = 0$, est résoluble par fonctions elliptiques, comme il a été démontré par M. KRONECKER. Or la condition $A = 0$ donne la valeur d'un des rapports des indéterminées $p : q : r$; on pourra donc disposer de l'autre, de manière que de la formule de transformation (4) on puisse déduire la valeur de y, et par conséquent la valeur de z en fonction de Z, au moyen d'une équation résoluble par radicaux. Par exemple, si l'on suppose, non seulement $A = 0$, mais aussi $t_4 = 0$, la valeur des rapports $p : q : r$ est complètement déterminée et l'on obtiendra la valeur de z en fonction de Z par la résolution d'une équation du quatrième degré, ce que démontre le théorème énoncé.

On peut arriver à ce résultat de différentes manières, en profitant cependant toujours de l'indétermination d'un des rapports indiqués. En supposant $\lambda = 0$ et par conséquent $q\mu + r\nu = 0$, on trouve très facilement qu'on satisfait à ces conditions

par les valeurs

$$p = f - 3\frac{b}{a}\delta, \qquad q = e + \delta, \qquad r = g,$$

en faisant

$$f = aa' - c^2 = 3bl - ca', \qquad e = 3bc - al, \qquad g = aa' - 9b^2,$$

et

$$\delta = \pm\sqrt{e^2 - fg}.$$

L'équation (2) donnera donc deux valeurs pour $\sqrt{Z}$ que j'indiquerai par $\sqrt{Z_1}$, $\sqrt{Z_2}$; et les équations jacobiennes, dont les racines sont les six valeurs de Z_1 ou de Z_2, seront résolubles par fonctions elliptiques. Or on peut démontrer que z s'exprime en fonction de Z_1, Z_2 par cette relation très simple:

$$z = 5a + \frac{a^2}{g\delta^2}\sqrt{Z_1 Z_2},$$

laquelle évidemment donne la valeur d'une racine quelconque de l'équation jacobienne générale (1) exprimée au moyen de fonctions elliptiques.

Dans un Mémoire qui est maintenant sous presse et qui sera publié dans les « Mathematische Annalen » *), j'ai calculé les valeurs des coefficients B, C correspondant aux deux équations en Z_1, Z_2, et j'ai démontré qu'en supposant que l'équation (1) soit l'équation du multiplicateur μ dans la transformation du cinquième ordre des fonctions elliptiques, les valeurs de Z_1, Z_2 sont dans ce cas données par les relations

$$\sqrt{Z_1} = -2^{11}k^2k'^4(1-2k^2)\left(\sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}} - \sqrt{\mu}\right),$$

$$\sqrt{Z_2} = -2^{11}k^4k'^2(1-2k^2)\left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}}\right),$$

k, k'; λ, λ' ayant les significations ordinaires.

On pourra ainsi déterminer deux modules k_1, k_2 correspondant aux deux équations en Z_1, Z_2 et l'on obtiendra enfin la résolution de l'équation générale (1):

$$z = 5a - \frac{1}{2}\sqrt[6]{\theta}\sqrt[3]{\frac{k_1'k_2}{2k_1^2k_2'^2}}\left(\frac{\operatorname{dn}2\omega_1}{\operatorname{dn}4\omega_1} - \frac{\operatorname{dn}4\omega_1}{\operatorname{dn}2\omega_1}\right)\left(\frac{\operatorname{cnc}2\omega_2}{\operatorname{cnc}4\omega_2} - \frac{\operatorname{cnc}4\omega_2}{\operatorname{cnc}2\omega_2}\right),$$

*) BRIOSCHI, *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* [Mathematische Annalen, t. XIII (1878), pp. 109-160].

dans laquelle

$$\theta = 128 a^3 b - 4ac + b_2, \qquad \omega = \frac{2K}{5}, \ \frac{2mK + iK'}{5},$$

pour $m = 0, 1, 2, 3, 4$ et ω_1, ω_2 les valeurs de ω correspondant aux modules k_1, k_2. Je dois ajouter encore que le dernier cas que j'ai considéré ici est lié intimement aux recherches très intéressantes de MM. KLEIN et GORDAN sur l'icosaèdre *).

26 novembre 1877.

---

*) F. KLEIN, *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder* [Mathematische Annalen, t. XII (1877), pp. 503-560]; P. GORDAN, *Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* [Sitzungsberichte der Phys. Medic. Societät zu Erlangen, t. IX (1877), pp. 183-186].

CXC.

SUR L'ÉQUATION DE LAMÉ.

(Extrait d'une lettre à M. HERMITE).

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXV (1877), pp. 1160-1162; t. LXXXVI (1878), pp. 313-315.

I.

En étudiant vos Mémoires *) et la Note de M. FUCHS **), je suis arrivé à une transformation de l'équation différentielle de LAMÉ, qui me semble digne de quelque intérêt, et que je m'empresse de vous communiquer, bien que mes occupations m'empêchent, pour le moment, d'aller plus au fond de cette recherche.

L'équation différentielle de LAMÉ étant

$$\frac{d^2y}{du^2} = [h + n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u]y,$$

si l'on pose

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3),$$

*) HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* [Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXV (1877), pp. 689-695, 728-732, 821-826, 870-875, 984-990, 1085-1091].

**) FUCHS, *Extrait d'une Lettre adressée à* M. HERMITE [Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXXV (1877), pp. 947-950].

et que l'on transforme l'équation même au moyen d'une des relations

$$x - e_1 = (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2 u, \qquad x - e_2 = (e_1 - e_2)\,\mathrm{cn}^2 u, \qquad x - e_3 = (e_1 - e_3)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

en supposant $k^2 = \dfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$, on obtient l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

dans laquelle

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \qquad q = -\frac{mc + n(n+1)x}{\varphi(x)},$$

et

$$mc = h(e_3 - e_1) - n(n+1)e_1, \tag{2}$$

m est un coefficient numérique, c une constante.

De la valeur de p on déduit que, en nommant y_1 une intégrale particulière de l'équation (1), une autre intégrale particulière y_2 sera donnée par l'équation

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2 \sqrt{\varphi(x)}}.$$

Cela posé, soit

$$m = -(n^2 + n - 3) \qquad \text{et} \qquad n = 1.$$

En posant, dans l'équation (1), $y = \sqrt{x - c}$, on obtient:

$$\frac{1}{4\varphi(x)} \frac{4c^3 - g_2 c - g_3}{(x - c)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

c'est-à-dire que $y_1 = \sqrt{x - c}$ est une intégrale particulière pour les valeurs de c, qui rendent $4c^3 - g_2 c - g_3 = 0$, ou pour $c = e_1, e_2, e_3$. On aura donc, dans ces trois cas, les intégrales

$$y_1 = \sqrt{x - e_1}, \qquad y_2 = \sqrt{x - e_1} \int \frac{dx}{(x - e_1)\sqrt{\varphi(x)}},$$

$$y_1 = \sqrt{x - e_2}, \qquad y_2 = \sqrt{x - e_2} \int \frac{dx}{(x - e_2)\sqrt{\varphi(x)}},$$

$$y_1 = \sqrt{x - e_3}, \qquad y_2 = \sqrt{x - e_3} \int \frac{dx}{(x - e_3)\sqrt{\varphi(x)}},$$

et l'équation (2) donne, pour les valeurs correspondantes de h:

$$c = e_1, \quad h = -(1 + k^2); \quad c = e_2, \quad h = -1; \quad c = e_3, \quad h = -k^2,$$

ou les trois cas considérés par M. FUCHS.

Soit $n = 2$; en posant, dans l'équation (1), $y = \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{x - c}}$, on obtient:

$$\frac{3}{4\sqrt{\varphi(x)}} \frac{4c^3 - g_2 c - g_3}{(x - c)^{\frac{5}{2}}} = 0;$$

on a, en conséquence:

$$y_1 = \sqrt{(x - e_2)(x - e_3)}, \qquad y_2 = \sqrt{(x - e_2)(x - e_3)} \int \frac{dx}{(x - e_2)(x - e_3)\sqrt{\varphi(x)}},$$

et l'on a, pour

$$c = e_1, \quad h = -(1 + k^2); \quad c = e_2, \quad h = -(1 + 4k^2); \quad c = e_3, \quad h = -(4 + k^2).$$

Si l'on fait $z = y_1 y_2$, l'équation (1) donne l'équation différentielle du troisième ordre *)

$$z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + 4q)z' + 2(q' + 2pq)z = 0,$$

ou

$$z''' + \frac{3}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} z'' - 4(n^2 + n - 3)\frac{x - c}{\varphi(x)} z' - \frac{2n(n + 1)}{\varphi(x)} z = 0.$$

Pour $n = 1$, on voit tout de suite qu'on satisfait à cette équation en posant $z = x - c$; on aura donc:

$$y_1 = \sqrt{x - c}\, e^{A\psi(x)}, \qquad y_2 = \sqrt{x - c}\, e^{-A\psi(x)},$$

si l'on écrit

$$\psi(x) = \int \frac{dx}{(x - c)\sqrt{\varphi(x)}},$$

et de l'équation (1) on déduit

$$A = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varphi(c)}.$$

C'est votre résultat.

Je pourrais ajouter d'autres observations, surtout sur la forme remarquable de l'équation (1); mais le peu qui précède suffit pour montrer l'utilité de la transformation dont j'ai fait usage.

---

*) J'ai obtenu de mon côté et employé cette même équation, dont on verra le rôle dans la suite de mon travail. [Note de M. CH. HERMITE].

II.

Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0,$$

où p et q sont deux fonctions de x quelconques. Je considère une forme binaire de l'ordre m à coefficients constants $f(y_1, y_2)$, et je pose

$$f(y_1, y_2) = F(x).$$

Cela étant, j'ai démontré autrefois que le hessien de la forme f s'exprime ainsi:

$$(1) \quad h(y_1, y_2) = \frac{e^{2\int p\,dx}}{m^2(m-1)C^2}[mFF'' - (m-1)F'^2 + mpFF' + m^2qF^2],$$

C étant la constante introduite par la relation connue:

$$y_2y'_1 - y_1y'_2 = Ce^{-\int p\,dx}.$$

En particulier, si la forme $f(y_1, y_2)$ est quadratique, de sort que $m = 2$, le hessien sera une constante, et, en supposant $f(y_1, y_2) = y_1y_2$, ce qui donnera $h(y_1, y_2) = -\frac{1}{4}$, nous tirerons de l'équation (1) la suivante:

$$(2) \qquad C^2 + e^{2\int p\,dx}(2FF'' - F'^2 + 2pFF' + 4qF^2) = 0.$$

C'est au moyen de ce résultat que je parviens à intégrer l'équation de Lamé, en prenant $p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, $q = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, l'équation (2) devenant ainsi:

$$(3) \qquad C^2 + \varphi(x)(2FF'' - F'^2) + \varphi'(x)FF' + 4\psi(x)F^2 = 0.$$

Mais supposons d'abord $\varphi(x) = x(1-x)$; je trouve que, $F(x)$ étant représenté par $x^n + ax^{n-1} + \cdots$, on a:

$$\psi(x) = \frac{n^2}{4}.$$

Or l'équation différentielle est, dans ce cas,

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{1-2x}{x(1-x)}y' + \frac{n^2}{4x(1-x)}y = 0,$$

c'est-à-dire l'équation de GAUSS:

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0,$$

avec $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = -\frac{n}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, et l'on est amené à cette conséquence connue, que les intégrales y_1, y_2 sont des fonctions algébriques de la variable.

Soit, en second lieu, $\varphi(x) = x(1-x)(1-k^2x)$, les coefficients des termes en x^{2m+1} et x^{2m}, dans l'équation (3), montrent qu'on a alors:

$$\psi(x) = -\tfrac{1}{4}[n(n+1)k^2x + h],$$

en posant $h = -(2n-1)ak^2 - n^2(1+k^2)$, ce qui nous conduit à l'équation de LAMÉ.

Mais on peut aller plus loin et obtenir l'intégration d'une équation plus générale, comprenant celle de LAMÉ comme cas particulier. Je suppose $m = 4$ dans l'équation (1), et je prends $f(y_1, y_2) = y_1^2y_2^2$; nous aurons ainsi:

$$4C^2F + \varphi(x)(4FF'' - 3F'^2) + 2\varphi'(x)FF' + 16\psi(x)F^2 = 0.$$

Cela étant et faisant encore $\varphi(x) = x(1-x)(1-k^2x)$, on obtient l'expression suivante:

$$\psi(x) = -\tfrac{1}{16}[n(n+2)k^2x + h],$$

où j'ai posé $h = -2(n-1)ak^2 - n^2(1+k^2)$. Voici, en conséquence, à l'égard de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{1}{4}[n(n+2)k^2\,\mathrm{sn}^2u + h]y,$$

cette propriété que $y_1y_2 = \sqrt{F(\mathrm{sn}^2u)}$, F étant un polynôme entier du degré n. Si le nombre n est pair, elle rentre dans l'équation de LAMÉ; mais, s'il est impair, j'ai trouvé que l'on a:

$$y_1y_2 = \Phi(x)\sqrt{x-\xi},$$

$\Phi(x)$ étant un polynôme de degré $\frac{n-1}{2}$ et ξ une racine de l'équation:

$$\varphi(x) = x(1-x)(1-k^2x) = 0.$$

On voit de suite que, dans ce cas, les intégrales sont algébriques, ce qui me sem-

ble remarquable. Enfin je pense, au moins d'après l'étude de quelques cas particuliers, qu'on peut traiter par une méthode semblable les équations linéaires du second ordre, où une puissance quelconque r de $y_1 y_2$ serait une fonction entière de la variable, la quantité $\psi(x)$ étant alors:

$$-\frac{1}{r^2}[n(n+r)k^2 x + h].$$

17 décembre 1877; 4 février 1878.

INDICE ALFABETICO

DEI NOMI RICORDATI IN QUESTO VOLUME.

Il numero indica la pagina e l'esponente quante volte il nome è ripetuto nella stessa pagina.

FINE DEL TOMO QUARTO.

Edizioni ULRICO HOEPLI. – Milano.

PUBBLICAZIONI MATEMATICHE

BELTRAMI E. — Opere matematiche, per cura della Facoltà di scienze della R. Università di Roma. *Tomo Primo,* con ritratto e biografia dell'autore. 1902, in-4, pp. XXII-437. L. 25 —

— *Tomo Secondo.* 1904, in-4, di pp. IV-468. . . . . » 25 —

(Il vol. III è in corso di stampa).

BETTI E.—Opere matematiche, pubblicate per cura della R. Accademia dei Lincei. Vol. I. 1903, in-4, di pp. XII-413 . » 25 —

(L'opera sarà completa in due volumi).

FERRARIS GALILEO. — Opere, pubblicate per cura dell'Associazione elettrotecnica italiana. Vol. I. 1902, in-8, pp. XXIV-492, con 52 inc., 4 tav. litografate e il ritratto dell'Autore . . . . » 12 —

— Vol. II. 1903, in-8, pp. VI-473, con 32 inc. e 2 tavole. » 12 —

— Vol. III (ed ultimo). 1904, in-8, pp. VI-367, con 87 incisioni e 2 tavole . . . . » 12 —